

1 Expériences aléatoires

Définition

On dit qu'une expérience est **aléatoire** si elle peut aboutir à plusieurs résultats possibles (qu'on appelle "issues") et si l'on ne sait pas quelle issue va se produire quand on réalise l'expérience.

Exemples :

1. Lancer une pièce et regarder si elle présente pile ou face, il y a deux issues possibles : pile et face.
2. Lancer un dé à six faces et lire le résultat, il y a six issues possibles : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
3. Le tirage du loto, il y a énormément d'issues possibles : 19 068 840.

Contre-exemples :

1. Nombre de notes au dessus de 15/20 en mathématiques (la chance n'a rien à voir...).
2. La surface d'une boule quand on connaît son rayon (une formule permet de déterminer directement le volume en fonction du rayon r : $\frac{4}{3}\pi r^3$).

2 Évènements et probabilités

Définition

En probabilités, un "évènement" est un ensemble de résultats (ou issues) d'une expérience aléatoire.

Remarque : Chaque issue est un évènement.

Exemples : On lance un dé à six faces.

- Chaque issue est un évènement, "obtenir 1", "obtenir 2", "obtenir 3", "obtenir 4", "obtenir 5", "obtenir 6" sont des issues et donc aussi des évènements.
- "Obtenir un nombre pair" est aussi un évènement car il est constitué des issues : "obtenir 2", "obtenir 4" et "obtenir 6".

Définition

Lors d'une expérience aléatoire, la **probabilité** qu'un évènement se produise est un nombre compris entre 0 et 1 qui représente "les chances" que cet évènement se produise.

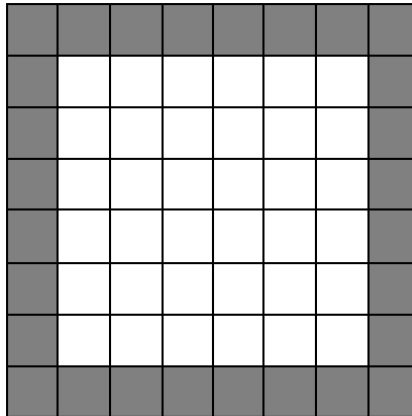
Quand l'expérience aléatoire a un nombre fini d'issues possibles, on peut calculer la probabilité d'un évènement en faisant le quotient du nombre d'issues favorables sur le nombre total d'issues.

Exemples :

• On lance un dé à six faces. La probabilité de l'évènement E : "obtenir un chiffre impair" est donc 0,5. En effet, il y a 3 issues favorables $\{ 1 ; 3 ; 5 \}$ sur 6 issues au total. On écrit $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$.

• On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. La probabilité de l'évènement F : "obtenir un roi" est $P(F) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0,125$.

• On choisit une case au hasard sur un damier de 8 cases sur 8. La probabilité de l'évènement : G : "on a choisi une case située au bord" est $P(G) = \frac{28}{64} = \frac{7}{16} = 0,4375$.



Remarques :

1. Si la probabilité d'un évènement est nulle alors on dit que c'est un évènement **négligeable**.
2. Si la probabilité d'un évènement est égale à 1 alors on dit que c'est un évènement **certain**.

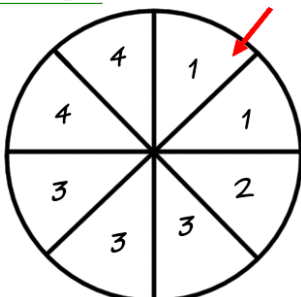
3 Arbres des possibles

3.1 Avec une épreuve

Définition

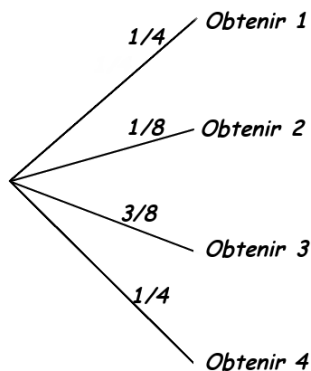
On peut représenter une expérience aléatoire menant à un nombre fini d'issues par un schéma qu'on appelle "**arbre des possibles**".

Exemple :



On fait tourner la roue ci-contre et on regarde le nombre sur lequel elle s'arrête.

Seul quatre issues sont possibles : 1 ; 2 ; 3 ou 4, l'arbre des possibles de cette expérience aléatoire aura donc quatre branches sur lesquelles on peut inscrire la probabilité de chaque issue.



La probabilité d'obtenir "1" est $\frac{1}{4}$ car on a 2 chances sur 8 d'obtenir "1" et $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Considérons l'évènement :
 E : "obtenir un nombre impair".

Pour calculer la probabilité de l'évènement E il suffit d'ajouter les probabilités de chaque issues favorables, ici $P(E) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

4 Évènements incompatibles et évènements contraires

4.1 Évènements incompatibles

Propriété

On dit que deux évènements A et B sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Dans ce cas la probabilité que l'un ou l'autre se produise est égal à la somme des probabilités de chacun d'eux.

Exemple :

On lance un dé à six faces.

Si $A = \{\text{obtenir un nombre impair}\}$ et $B = \{\text{obtenir 2}\}$ alors A et B sont bien incompatibles puisqu'ils ne peuvent pas se produire simultanément.

On a alors $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Attention : cette propriété d'addition devient fausse quand les évènements ne sont pas incompatibles.

4.2 Évènements contraires

Propriété

On dit que deux évènements A et B sont contraires lorsque l'un se produit uniquement quand l'autre ne se produit pas. On écrit alors : $A = \text{non } B$.

Dans ce cas la somme des probabilités de ces évènements est égal à 1. On écrit : $P(A) + P(B) = 1$.

Exemple :

Si on reprend l'exemple du paragraphe 2. (Évènements et probabilités), le damier

avec $G = \{\text{on a choisit une case située au bord}\}$, l'évènement contraire de G est alors :

$H = \{\text{on a choisit une case qui n'est pas au bord}\}$, on a alors $P(G) + P(H) = 1$ autrement dit :

$P(H) = 1 - P(G) = 1 - 0,4375 = 0,5625$.

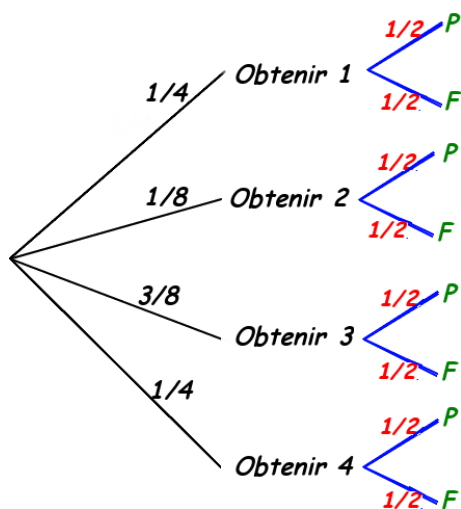
5 Expériences aléatoires à deux épreuves

Propriété

Dans un arbre à plusieurs épreuves, la probabilité d'un événement est égal au **produit** des probabilités menant à cet événement.

Exemples :

On fait tourner la roue précédente puis on lance une pièce (non truquée).



- La probabilité d'obtenir le chiffre 3 et d'avoir *pile* est de :

$$\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16} = 0,1875.$$

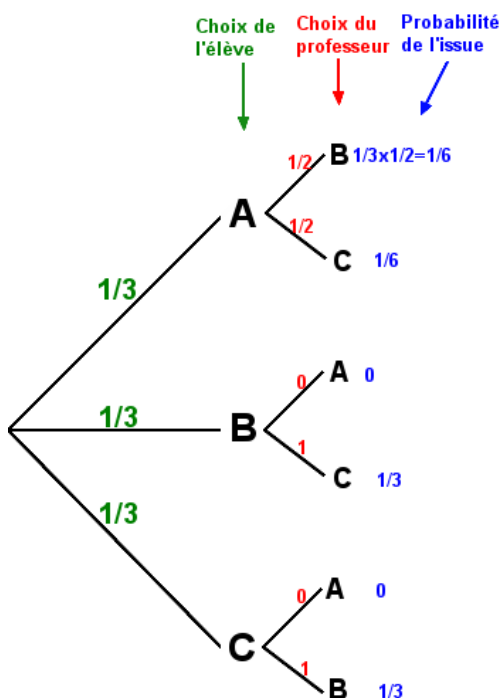
- La probabilité d'obtenir le chiffre 4 et d'avoir *face* est de :

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Le jeu des boîtes :

On dispose de trois boîtes indexées par A, B et C, l'une d'entre elles contient le corrigé du prochain contrôle de mathématiques et les autres sont vides. Un élève choisit une boîte au hasard puis le professeur décide de montrer à cet élève que l'une des deux autres boîtes est vide et il laisse le choix à l'élève de changer ou non de boîte.

L'élève a-t-il intérêt à changer de boîte ?



Pour simplifier un peu le raisonnement on peut supposer que le corrigé se trouve dans la boîte A (s'il se trouve dans une autre boîte le raisonnement sera exactement le même).

L'élève ayant choisit la boîte au hasard, la probabilité qu'il choisisse la boîte A est $\frac{1}{3}$ (idem pour les boîtes B et C - en vert sur l'arbre ci-contre).

Ensuite le professeur décide de montrer à l'élève une boîte vide. Si l'élève a auparavant choisit la boîte A alors le professeur peut montrer indifféremment la boîte B ou C puisque de toute manière elles sont toutes les deux vides.

Il y a donc dans ce cas une chance sur deux que le professeur choisisse la boîte B et une chance sur deux qu'il choisisse la boîte C (en rouge sur l'arbre).

Par contre si l'élève a choisit auparavant la boîte B alors le professeur ne peut pas lui montrer la boîte A puisqu'elle contient le corrigé, il va donc lui montrer de manière certaine (probabilité égale à 1) la boîte C.

On a le même raisonnement si l'élève choisit la boîte C.

Au final, l'élève a une probabilité de $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ de trouver le corrigé s'il change de boîte alors qu'elle n'est que de $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ s'il garde la même boîte.

6 Fréquences et probabilités

Propriété (Loi des grands nombres).

Plus on répète une expérience un grand nombre de fois plus la fréquence d'un évènement se rapproche de sa probabilité.

Exemples :

- Si on lance un très grand nombre de fois une pièce, la fréquence d'apparition de "face" (nombre de faces divisé par le nombre de lancers) sera proche de 0,5.

Expérience réalisée en classe :

On a lancé une pièce 50 fois (pour gagner du temps on a partagé le travail en 5 groupes ayant chacun lancé 10 fois une pièce). On a compté le nombre d'apparition de "pile", on obtient le tableau suivant :

	groupe 1	groupe 2	groupe 3	groupe 4	groupe 5
nombre de "pile"	6	5	4	7	4

La fréquence de "pile" pour les 10 premiers lancers est donc : $\frac{6}{10} = 0,6$.

La fréquence de "pile" au bout de 20 lancers est donc : $\frac{6+5}{20} = 0,55$.

La fréquence de "pile" au bout de 30 lancers est donc : $\frac{6+5+4}{30} = 0,5$.

ect... On peut établir le tableau suivant :

nombre de "pile"	6	11	15	22	26
nombre de lancers	10	20	30	40	50
fréquence	0,6	0,55	0,5	0,55	0,52

La fréquence de "pile" finira toujours pas se rapprocher de la probabilité d'avoir "pile" c'est à dire $\frac{1}{2}$.

On a simulé avec le tableur 1000 lancers de pièces et calculer au fur et à mesure la fréquence de "pile". On a reporté sur l'axe des ordonnées la fréquence et sur l'axe des abscisses le nombre de lancers, voici la représentation graphique pour les 500 premiers lancers. On voit la fréquence se rapprocher de la probabilité 0,5.



- Si on lance un très grand nombre de fois un dé, la fréquence d'apparition de "six" (nombre de d'apparitions de six divisé par le nombre de lancers) sera proche de $\frac{1}{6}$.