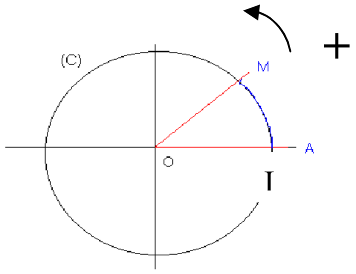
الثانوية التأهيلية: وادي الذهب الأستاذ : رشيد بلمو	درس الحساب المثلثي الجزء1	مستوى الدراسي: TCS - TCT عدد الساعات : 15

1. توجيه المستوى:



لتكن (C) دائرة من المستوى (P) مركزها O, و لتكن I و M نقطتين من (C).

لدينا منحنيين للوصول إلى النقطة M انطلاقا من I . أحدهما موجب و الآخر سالب.

لقد تم اختيار المنحى الموجب هو المنحى المضاد لحركة عقربي الساعة (المنحى + المشار إليه في الشكل) و يسمى المنحى المثلثي.

- عندما نختار هدا المنحى نقول بأننا وجهنا الدائرة (C) توجيها موجبا أو مباشرا.
- بتوجيه جميع دوائر المستوى (P) توجيها موجبا نقول بأننا وجهنا المستوى (P) توجيها موجبا أو مباشرا.

2. الدائرة المثلثية:

الدائرة المثلثية هي كل دائرة شعاعها 1 مزودة بأصل و موجهة توجيها موجبا.

3- وحدات قياس الزوايا

لقياس الزوايا هناك ثلاث وحدات هي الدرجة و الغراد و الراديان.

تعريف الراديان

الراديان هو قياس زاوية مركزية، في دائرة شعاعها R ، تحصر قوسا دائرية طولها R .

نرمز لها بـ rd أو rad

$\pi rd = 200gr = 180^{\circ}$ (gr : يرمز للغراد)

ملاحظة

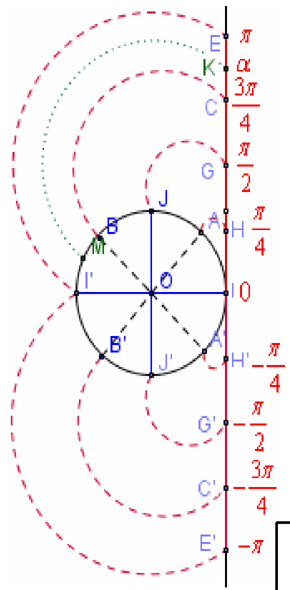
نتيجة

إذا كان x قياس زاوية بالراديان و y قياسها بالدرجة و z قياسها بالغراد فان $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180} = \frac{z}{200}$

**** تمرين تطبيقي : (02 - س)**

4. الأفاصيل المنحنية لنقطة من دائرة مثلثية:

a - الأفصول المنحني الرئيسي لنقطة على الدائرة المثلثة



خاصية و تعريف

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها I.

كل نقطة M من (C) تمثل عدد وحيد α من $]-\pi;\pi]$ و كل عدد α من $]-\pi;\pi]$ يمثل نقطة وحيدة M من (C).

العدد α يسمى الافصول المنحني الرئيسي لـ M

ملاحظة قياس الزاوية الهندسية $[\widehat{IOM}]$ هو $|\alpha|$ راديان

**** تمرين تطبيقي : (03 - س)**

b - الأفاصيل المنحنية لنقطة على الدائرة المثلثية

تعريف

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية (C) أصلها I. و ليكن α أفصولها المنحني الرئيسي

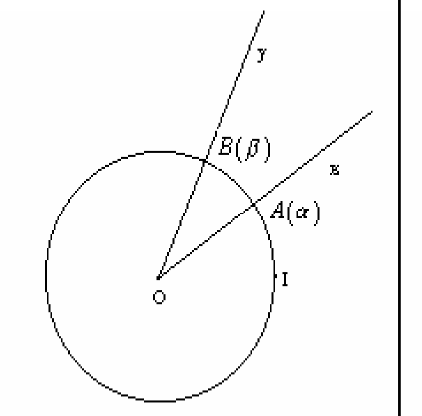
كل عدد يكتب على الشكل $\alpha + 2k\pi$ بحيث k عنصر من $\mathbb{Z}$ يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M.

خاصية - إذا كان x و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر λ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x - y = 2\lambda\pi$ و نكتب $[2\pi]$ $x \equiv y$ و نقرأ x يساوي y بترديد 2π.

- إذا كان x أفصول منحني للنقطة M فان جميع الأفاصيل المنحنية للنقطة M تكتب على شكل $x + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

**** تمرين تطبيقي : (04 - س)**

4. الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم:



خاصية و تعريف

*كل زوج $([OA),[OB))$ من نصفي مستقيم يحدد الزاوية الموجهة المرموز اليها ب:

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$ أنظر الشكل.

*ليكن α و β أفصولين منحنيين للنقطتين A و B على التوالي. الأعداد الحقيقية $\beta-\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ هي قياسات للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

و نكتب: $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\beta-\alpha[2\pi]$.

*للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$ قياس وحيد في المجال $]-\pi,\pi]$ يسمى القياس الرئيسي للزاوية.

** تمرين تطبيقي:

1 - ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات 47π ; -36π ; $\frac{52\pi}{5}$; $-\frac{25\pi}{3}$

2 - أنشئ زاوية موجهة $\left(\widehat{Ox;Oy}\right)$ قياسها $\frac{-234\pi}{5}$.

5. الزاوية الموجهة لمتجهتين:

تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين: $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ اذن $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ و منه $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)$

خاصيات: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من المستوى.

$\left(\overline{\vec{u},\vec{u}}\right)\equiv0[2\pi]$ و $\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)\equiv-\left(\overline{\vec{v},\vec{u}}\right)[2\pi]$ و $\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)+\left(\overline{\vec{v},\vec{w}}\right)\equiv\left(\overline{\vec{u},\vec{w}}\right)\;[2\pi]$ علاقة شال.

** تمرين تطبيقي :

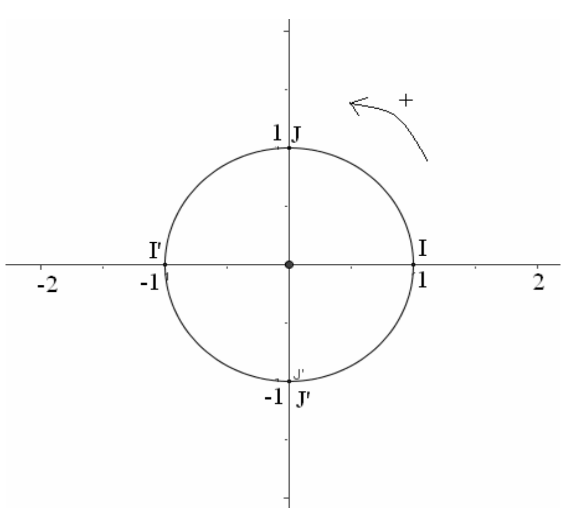
لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I. نعتبر على (C) النقط التالية المعرفة بأفاصيلها المنحنية $A(\pi)$ $B\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ $E\left(\frac{23\pi}{4}\right)$ $F\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$

أعط قياسا لكل من الزاويا التالية ، ثم حدد القياس الرئيسي لكل منهن

$\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA}}\right)$; $\left(\overline{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}\right)$; $\left(\overline{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE}}\right)$; $\left(\overline{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}}\right)$

6. النسب المثلثية لعدد حقيقي:

a- المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثية



لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I .

ولتكن J من (C) بحيث $\left(\widehat{OI;OJ}\right)$ زاوية قائمة موجبة

المعلم $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم المباشر المرتبط بالدائرة المثلثية (C).

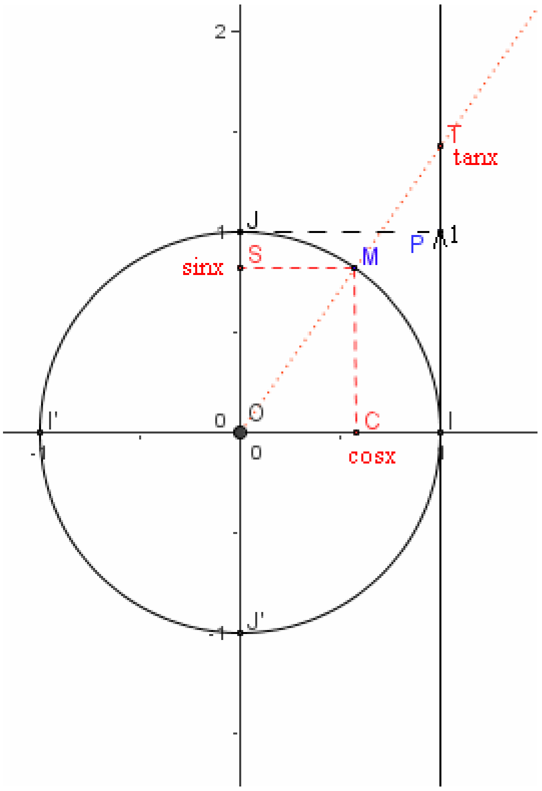
لتكن J' من (C) بحيث $\left(\widehat{OI;OJ'}\right)$ زاوية قائمة سالبة .

المعلم $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ'}\right)$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم الغير المباشر المرتبط بالدائرة المثلثية (C).

b- النسب المثلثية

تعاريف

لتكن (C) دائرة مثلثية و $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بها. لتكن M نقطة من (C) و x أفصولا منحنيا لها . نعتبر C المسقط العمودي لـ M على (OI) و S المسقط العمودي لـ M على (OJ)



*- العدد الحقيقي أفصول النقطة M في المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى جيب تمام العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\cos x$

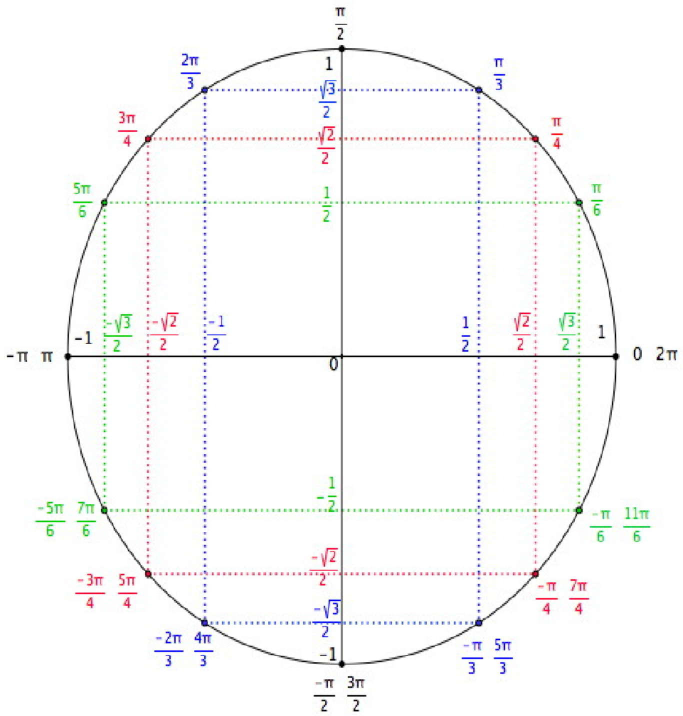
*- العدد الحقيقي أرتوب النقطة M في المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى جيب العدد الحقيقي x . نرمز له بـ $\sin x$

*- ليكن Δ المماس لـ (C) عند I و النقطة $P(1;1)$.
لتكن T نقطة تقاطع (OM) و Δ أي

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

العدد الحقيقي أفصول T في المعلم $(I;P)$ يسمى ظل العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\tan x$.

خاصيات:



لكل x من $\mathbb{R}$	$-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$
لكل x من $\mathbb{R}$ لكل $k \in \mathbb{Z}$	$\cos(x+2k\pi) = \cos x$ $\sin(x+2k\pi) = \sin x$
الدالة $Co\sin us$ زوجية: $\cos(-x) = \cos x$ لكل x من $\mathbb{R}$. الدالة $Sinus$ فردية: $\sin(-x) = -\sin x$	
لكل x من $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ لدينا:	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\tan(x+k\pi) = \tan x$

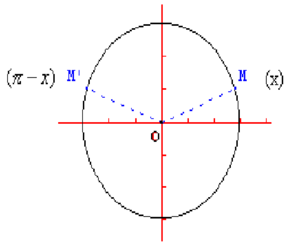
لكل x من $\mathbb{R}$	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
لكل x من $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

** تمرين تطبيقي : (05 - س) (2-4)

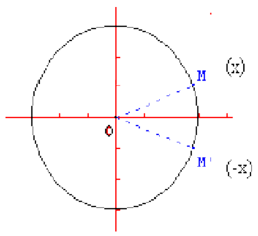
** تمرين تطبيقي : (10 - س) (3)

c. العلاقة بين النسب المثلثية لعدد:

*- بتوظيف الدائرة المثلثية نحصل على



$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\tan x$	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$

** تمرين تطبيقي : (7 - س) (1-5)

d - نسب مثلثية اعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

** تمرين تطبيقي : (6 - س)