الثانوية التأهيلية: وادي الذهب الأستاذ : رشيد بلمو	درس الدوال العددية	مستوى الدراسي: TCS - TCT عدد الساعات : 25

I. عموميات حول الدوال العددية:

1. دالة عددية لمتغير حقيقي:

تعريف:
ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$.
نسمي f دالة عددية معرفة على D (أو f دالة من D نحو $\mathbb{R}$), كل علاقة تربط كل عنصر x من D بعنصر وحيد من $\mathbb{R}$, يرمز له بالرمز $f(x)$.

اصطلاحات: لتكن f دالة عددية معرفة على D نكتب: $f : D \to \mathbb{R}$
$x \to f(x)$

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف الدالة f .
- ليكن x عنصرا من D, بحيث: $y = f(x)$
  - y يسمى صورة x بالدالة f .
  - العنصر x يسمى سابق العنصر y .
- الدالة f تسمى كذلك دالة عددية لمتغير حقيقي.

مثال : ليكن f الدالة العددية المعرفة كالتالي : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x) = 3x^2 - 1$

1. أحسب : $f(1)$ و $f(-1)$ و $f(\sqrt{2})$
2. حدد سوابق العدد 2

2. مجموعة تعريف دةال عددية:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x .
مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجود أي $f(x)$ قابلة للحساب. و يرمز لها غالبا بالرمز D_f بمعنى: $x \in D_f$ تكافئ $f(x) \in \mathbb{R}$.

ملحوظة: نقول إن f دالة عددية معرفة على A إذا كان A جزءا من D_f .

أنشطة : حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ (2 $g(x) = \dfrac{x^3}{2x-4}$ (3 $h(x) = \dfrac{5x+10}{x^2-9}$ (4 $m(x) = \sqrt{2x-4}$

3. تساوي دالتين عدديتين:

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين لهما نفس مجموعة تعريف D .
تكون الدالتان f و g متساويتان إذا وفقط إذا كان $f(x) = g(x)$ لكل x من D . و نكتب: $f = g$

مثال: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = |x|$
لدينا: $D_f = \mathbb{R}$, لأن $x^2 \geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$, و $D_g = \mathbb{R}$ و منه فان $D_f = D_g$.
و بما أن $\sqrt{x^2} = |x|$ لكل x من $\mathbb{R}$ فان $f(x) = g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ إذن $f = g$.

4. التمثيل المبياني لدالة عددية:

المستوى المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ غالبا يكون متعامدا ممنظما.

تعريف:
لتكن f دالة عددية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.
التمثيل المبياني C_f للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى بحيث:

- الأفصول x يتغير في مجموعة التعريف D .
- الأرتوب y هو صورة x بالدالة f .

بمعنى $x \in D$ و $y = f(x)$.

هذا التعريف يعني: إذا كان $M(x,y)\in C_f$ فان $x\in D$ و $y=f(x)$.

إذا كان $x\in D$ و $y=f(x)$ فان $M(x,y)\in C_f$.

العلاقة $y=f(x)$ تسمى معادلة ديكارتية للمنحنى C_f في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

مثال1 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$ و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و ليكن A و B نقط أفاصليها هي -1 و 2 على التوالي

1) حدد أراتيب A و B علما أنهما ينتميان إلى (C_f).

2) لتكن $E\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{5}\right)$, $F(-3;5)$, $G(1;0)$ نقط من المستوى. هل النقط E , F و G تنتمي للمنحنى (C_f)؟

مثال2 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2$

أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ ماذا تلاحظ بالنسبة لمنحنى الدالة؟

5. الدالة الزوجية- الدالة الفردية:

أ) الدالة الزوجية:

تعريف:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان:

- لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f.
- لكل x من D_f لدينا: $f(-x)=f(x)$

لكل x من, $-x$ تنتمي إلى D_f يعني أن D_f متماثل بالنسبة للعدد0.

خاصية: (التأويل المبياني لدالة زوجية)

لتكن f دالة عددية لمتغير x حقيقي و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل المنحنى C_f.

مثال نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$

بين أن f دالة زوجية

ملاحظة:

إذا كانت f دالة زوجية (على التوالي فردية) فانه يكفي إنشاء C_f على $D_f\cap\mathbb{R}^+$ و بالتماثل بالنسبة لمحور الأراتيب (على التوالي بالنسبة لأصل المعلم) نحصل على المنحنى C_f بكامله.

ب)الدالة الفردية:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

تعريف:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها

نقول أن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان:

- لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f.
- لكل x من D_f لدينا: $f(-x)=-f(x)$

خاصية: (التأويل المبياني لدالة فردية)

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f.

مثال نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x)=\dfrac{2}{x}$

بين أن f دالة فردية

II. تغيرات دالة عددية:

مثال 1: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x)=2x+1$

املأ الجدول التالي : ماذا تلاحظ؟

-100	-10	-7	-3	0	2	5	10	100

مثال 2: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x)=-3x+2$

املأ الجدول التالي : ماذا تلاحظ؟

-100	-10	-7	-3	0	2	5	10	100

مثال 3: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x)=3$

املأ الجدول التالي : ماذا تلاحظ؟

-100	-10	-7	-3	0	2	5	10	100

1. **تعريف:** لتكن f دالة عددية معرفة على المجال I .

❖ نقول إن الدالة f تزايدية قطعا (تناقصية قطعا) على المجال I , إذا و فقط إذا كان لكل, إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1) \prec f(x_2)$ $(f(x_1) \succ f(x_2))$

❖ نقول إن الدالة f ثابتة على المجال I , إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I لدينا: $f(x_1)=f(x_2)$

2. **جدول تغيرات دالة:** لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.

دراسة منحى تغيرات الدالة f , يعني تجزيء المجموعة D_f إلى أكبر مجالات ممكنة تكون فيها الدالة f تزايدية أو تناقصية قطعا أو ثابتة.

و نلخص نتائج هذه الدراسة في جدول, يسمى جدول تغيرات الدالة f , بحيث السهم ↗ (تصاعدي) يعني أن f تزايدية قطعا, و السهم ↘ (تنازلي) يعني أن تناقصية f قطعا و السهم (أفقي) ⟶ يعني أن f ثابتة.

تمرين: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\frac{3}{2}x^2$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2) أدرس رتابة الدالة f على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$ وحدد جدول تغيرات الدالة f .

3) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

3. رتابة دالة f على مجال:

تعريف: لتكن دالة عددية معرفة على مجال I .

نقول إن f رتيبة قطعا على المجال I إذا كانت تزايدية قطعا على I أو تناقصية قطعا على I .

III. القيم القصوى و القيم الدنيا لدالة عددية على مجال:

تعاريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصرا من I .

نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I إذا و فقط إذا كان: $f(x)\le f(a)$ لكل x من I .

نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I إذا و فقط إذا كان: $f(x)\ge f(a)$ لكل x من I .

نقول كذلك الدالة f تقبل قيمة قصوى (أو دنيا) عند النقطة a على المجال I .

إذا كان $f(a)$ قيمة قصوى أو قيمة دنيا للدالة f نقول إن $f(a)$ مطراف للدالة f .

مثال: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=x^2+2x+3$.

1) أحسب $f(-1)$ و تأكد أن : $f(x)=(x+1)^2+2$

2) تأكد أن : $f(x)\ge f(-1)$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

3) ماذا تستنتج؟

IV. الدالة: $x \mapsto ax^2$ $(a \neq 0)$

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = ax^2$ و (P) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم.

زوجية الدالة f: ليكن $x \in \mathbb{R}$: لدينا $-x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = a(-x)^2$, إذن $f(-x) = f(x)$ و منه f دالة زوجية.

تغيرات f :خاصية:

- إذا كانت $a \succ 0$: الدالة f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$ و تناقصية قطعا على $]-\infty,0]$.
- إذا كانت $a \prec 0$: الدالة f تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$ و تزايدية قطعا على $]-\infty,0]$.

الحالة: $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$-\infty$
f		0	

الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$-\infty$
f		0	

V. التمثيل المبياني للدالة f:

بما أن f دالة زوجية فانه يكفي أن نمثلها على $\mathbb{R}^+$.

ثم نتمم المنحنى (P) باستعمال التماثل المحوري بالنسبة لمحور الأراتيب.

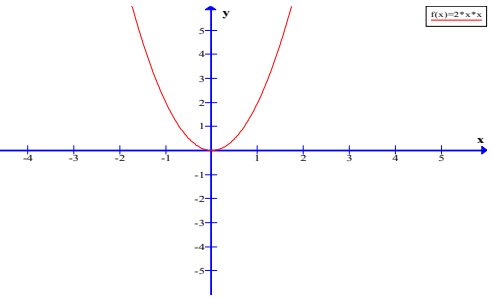
تعريف: المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto ax^2$ $(a \neq 0)$ يسمى شلجما.

النقطة أصل المعلم تسمى رأس الشلجم.

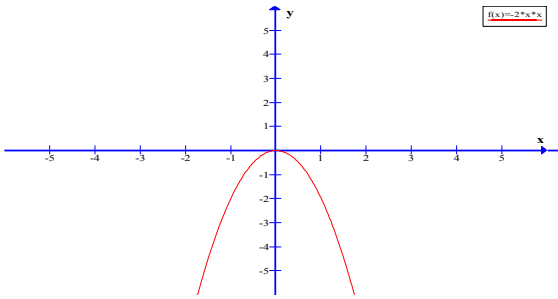
محور الأراتيب يسمى الشلجم.

كل منحنى يقبل معادلة على شكل $Y = aX^2$ حيث $a \neq 0$ في معلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ يسمى شلجما رأسه Ω و محور تماثله هو محور الأراتيب (ΩY).

حالة: $a \succ 0$



حالة: $a \prec 0$



VI. الدالة: $x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة بما يلي: $f(x) \mapsto \frac{a}{x}$ و (H) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$.

مجموعة التعريف: مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

زوجية الدالة f : ليكن x من D_f , لدينا $-x \in D_f$ و $f(-x) = f(x)$ إذن f دالة فردية.

تغيرات f:

خاصية:

- إذا كان $a \succ 0$ فان الدالة f تناقصية قطعا على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.
- إذا كان $a \prec 0$ فان الدالة f تزايدية قطعا على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.

الحالة: $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		‖	

الحالة: $a \prec 0$

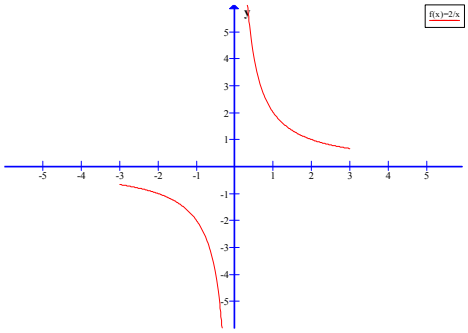
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		‖	

التمثيل المبياني للدالة f : بما أن f دالة فردية فانه يكفي أن نمثل f على $]0,+\infty[$, ثم نتمم منحنى الدالة f على باستعمال التماثل المركزي الذي مركزه O أصل المعلم.

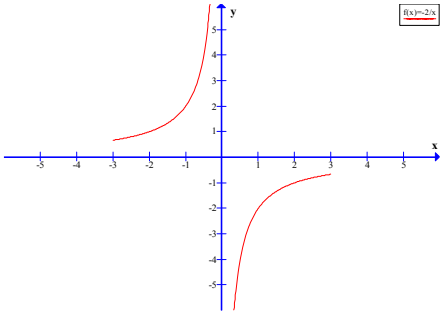
تعريف:

منحنى الدالة $x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ يسمى هذلولا مركزه O أصل المعلم و مستقيماه المقاربان هما $x = 0$ و $y = 0$.

حالة: $a \succ 0$



الحالة: $a \prec 0$



VII. التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $x \mapsto ax^2+bx+c$

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a و b و c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$.

❖ يوجد عددان حقيقيان α و β بحيث: $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$ (الشكل القانوني)

❖ منحنى الدالة f يسمى شلجما رأسه $S(-\alpha;\beta)$ و محوره $(D): x=-\alpha$.

نقبل النتائج التالية: جدول تغيرات f :

الحالة: $a \succ 0$

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
f		↘	β	↗	

الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
f		↗	β	↘	

مثال : لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=x^2+4x+3$.

بين أن: $f(x)=(x+2)^2-1$ (يسمى الشكل القانوني $f(x)=a(x+\alpha)^2+\beta$)

حدد جدول تغيرات الدالة f.

حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.

1) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب.

2) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D) الذي معادلته $(D): y=3$ في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

3) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D).

VIII. التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

4) المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

حيث $c \neq 0$ و a و b و c و d أعداد حقيقية و $ad-bc \neq 0$ و $x \neq \dfrac{d}{c}$.

نقبل النتائج التالية:

منحنى الدالة f هو صورة الهذلول (H) الذي معادلته $y=\dfrac{k}{x}$ بالإزاحة التي متجهتها $-\dfrac{d}{c}\vec{i}+\dfrac{a}{c}\vec{j}$.

جدول تغيرات f :

❖ **الحالة:** $k \succ 0$

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
f		↘	‖	↘	

الحالة: $k \prec 0$

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
f		↗	‖	↗	

❖ **منحنى** f يسمى هذلولا مركزه $S(-\alpha;\beta)$ و مقارباه $(D_1): x=-\alpha$ و $(D_2): y=\beta$.

❖ **مثال:** نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

1) حدد D_f 2) أكتب $f(x)$ على الشكل المختصر

3) حدد جدول تغيرات الدالة f

4) حدد نقط تقاطع منحنى الدالة f مع محوري المعلم

5) أرسم (C) التمثيل المبياني للدالة f