# مذكرة رقم 12 : ملخص لدرس: الجداء السلمي

## الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

| محتوى البرنامج | القدرات المنتظرة | توجيهات تربوية |
|---|---|---|
| - تعريف وخاصيات؛<br>- الصيغة المثلثية؛<br>- تعامد متجهتين؛<br>- بعض تطبيقات الجداء السلمي:<br>. العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية؛<br>. مبرهنة المتوسط؛<br>. مبرهنة الكاشي. | - التعبير عن المسافة والتعامد بواسطة الجداء السلمي.<br>- استعمال الجداء السلمي في حل مسائل هندسية.<br>- استعمال مبرهنة الكاشي ومبرهنة المتوسط لحل تمارين هندسية. | - يتم تقديم الجداء السلمي وخاصياته انطلاقا من الإسقاط العمودي.<br>- ينبغي التأكيد على دور هذه الأداة في تحديد بعض المحلات الهندسية في المستوى وفي حساب الأطوال والمساحات وقياسات الزوايا.<br>- تعتبر الصيغة التحليلية للجداء السلمي خارج المقرر. |

## I. تعاريف:

### تعريف 1: الجداء السلمي لمتجهتين:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى بحيث: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ و $H$ المسقط العمودي للنقطة $C$ على المستقيم $(AB)$.

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي يرمز له بالرمز $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و المعروف بما يلي:

- إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما نفس المنحى فان:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\times AH$$

- إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ لهما منحيان متعاكسان فان:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=-AB\times AH$$

- و نكتب $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\cdot AH$ أو $\vec{u}\cdot\vec{v}=AB\cdot AC$

### تعريف 2: الصيغة المثلثية للجداء السلمي:

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين و $\alpha$ هو قياس الزاوية $\widehat{BAC}$ حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ فان:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha$$

**نتيجة:**

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

**مثال :** ليكن $\frac{\pi}{4}$ قياسا لزاوية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ حيث: $\|\vec{u}\|=\frac{5}{2}\sqrt{2}$ و $\|\vec{v}\|=4$ أحسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$

**تمرين1** : ليكن $ABC$ مثلثا متساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي 6. أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

**تمرين2** : ليكن $EFG$ مثلثا بحيث: $EF=5$ و $EG=3$ و $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=-6$ أحسب $\cos\left(\widehat{FEG}\right)$

**تمرين3** : ليكن $ABC$ مثلثا بحيث $AB=3$ و $AC=4$ و $\widehat{BAC}=\frac{2\pi}{3}$ أحسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

## II. خاصيات الجداء السلمي:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)=k\vec{u}\cdot\vec{v}$ مهما يكن $k$ من $\mathbb{R}$.

### المتطابقات الهامة:

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$

$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$$

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$$

**ملاحظة:** $\vec{u}\cdot\vec{u}$ نرمز ل $\vec{u}^2$ ب: و يسمى المربع السلمي, و منه $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ اذن $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$

و اذا كانت $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ فان $AB=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

**تمرين4** : لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين بحيث: $\|\vec{u}\|=5$ و $\|\vec{v}\|=3$ و $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{3}{2}$ أحسب $\vec{u}^2$ و $\vec{v}^2$ و $(\vec{u}+\vec{v})^2$ و $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ و $(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+5\vec{v})$

**خاصية :** تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين إذا و فقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ و نكتب $\vec{u}\perp\vec{v}$

**نتيجة:** $(AB)\perp(CD)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ .

## III. علاقات مترية في مثلث قائم الزاوية:

**خاصية:** ليكن $ABC$ مثلثا و $H$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على $(BC)$.

إذا كان $ABC$ قائما في $A$ فان:

1) $AB^2+AC^2=BC^2$ (مبرهنة فيتاغورس)
2) $AC\times AB=AH\times BC$
3) $BA^2=BH\times BC$ أو $CA^2=CH\times BC$
4) $AH^2=HB\times HC$

براهين :

3) ليكن $ABC$ مثلثا و $H$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على $(BC)$. باعتبار المثلث : $(ABC)$ $\cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}$

و باعتبار المثلث : $(ABH)$ $\cos\hat{B}=\frac{BH}{AB}$ ومنه $\frac{AB}{AC}=\frac{BH}{AB}$ ومنه $AC^2=CH\times BC$

4) باعتبار المثلث : $(ABC)$ $\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}$ و باعتبار المثلث : $(ABH)$ $\sin\hat{B}=\frac{AH}{AB}$ ومنه $\frac{AC}{BC}=\frac{AH}{AB}$

ومنه $AC\times AB=AH\times BC$

**مثال:** $ABC$ مثلث قائم الزاوية في $A$ و $H$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على $(BC)$.

أحسب : $AC$ و $BH$ علما أن : $AB=2cm$ و $BC=5cm$

## IV. مبرهنة الكاشي:

**خاصية:** ليكن $ABC$ مثلثا لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

**نتائج:**

1. $\cos(\widehat{BAC})=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$
2. $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و منه $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$
3. هناك علاقتين مماثلتين للعلاقة الأولى:

$AB^2=CA^2+CB^2-2CA\times CB\times\cos(\widehat{ACB})$ و $AC^2=BA^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos(\widehat{ABC})$

**مثال:** ليكن $ABC$ مثلثا بحيث : $AB=5cm$ و $AC=8cm$

أحسب : $BC$ و $\cos(\widehat{ACB})$

## V. مبرهنة المتوسط:

**خاصية:** ليكن $ABC$ مثلثا و $I$ منتصف القطعة $[BC]$ لدينا: $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

**مثال:** ليكن $ABC$ مثلثا بحيث : $AB=3cm$ و $AC=6cm$ و $BC=4cm$ و $I$ منتصف القطعة $[BC]$

أحسب : $AI$