

## I. Approche :

- $f$  est une fonction ; on la note par  $y$ .
- $f'$  est sa dérivée ; on la note par  $y'$ .
- L'écriture  $f'(x) = af(x) + b$  on la note par  $y' = ay + b$  on l'appelle équation différentielle linéaire de première degré de coefficients constant  $a$  et  $b$ .
- Toute fonction  $g$  dérivable qui vérifie cette équation différentielle ( $g'(x) = ag(x) + b$ ) on l'appelle solution particulière de l'équation différentielle.
- Résoudre une équation différentielle c'est de trouver toutes les fonctions qui vérifie l'équation différentielle (c'est-à-dire de trouver la solution générale).
- Le programme se limite aux équations différentielles de la formes.

1.  $y' = ay + b$  avec  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$

2.  $y'' + ay' + by = 0$  avec  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$ .

## II. Equation différentielle de la forme $y' = ay + b$ $a$ et $b$ de $\mathbb{R}$ :

### a. Propriété :

Soit l'équation différentielle (E) :  $y' = ay + b$   $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$ .

- **Cas général  $a \neq 0$**  : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme :  $f(x) = \alpha \times e^{ax} - \frac{b}{a}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- **Cas particulier 1 :  $a = 0$  et  $b = 0$**  l'équation (E) est  $y' = 0$  l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la  $f(x) = c$ .
- **Cas particulier 2 :  $a = 0$  et  $b \neq 0$**  l'équation (E) est  $y' = b$  l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la  $f(x) = bx + \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### b. Exemples :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $y' = 4y + 5$    2.  $y' = -3y$    3.  $y' = 7$    4.  $y' = 0$

### c. Propriété :

l'équation différentielle (E) :  $y' = ay + b$   $a \neq 0$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$ .

Il existe une et une seule fonction  $f(x)$  qui est solution de l'équation (E) et qui vérifie la condition initiale  $f(x_0) = y_0$  avec  $x_0$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

### d. Exemple :

Déterminer la solution  $f(x)$  de l'équation différentielle (E) :  $y' = 4y + 5$  qui vérifie la condition initiale  $f(-7) = 11$

### III. Equation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = 0$ a et b de $\mathbb{R}$ :

#### a. Définition :

- Equation différentielle de la forme  $y'' + ay' + by = 0$  a et b de  $\mathbb{R}$  tel que l'inconnue c'est la fonction y avec y' sa dérivée première et y'' sa dérivée seconde s'appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant sans seconde membre.
- L'équation  $r \in \mathbb{C} : r^2 + ar + b = 0$  s'appelle l'équation caractéristique de l'équation :  $y'' + ay' + by = 0$
- Le nombre  $\Delta = a^2 - 4b$  s'appelle le discriminant de l'équation caractéristique .
- 

#### b. Propriété :

solution générale de l' équation différentielle (E) :  $y'' + ay' + by = 0$  a et b de  $\mathbb{R}$  dépend du signe de  $\Delta$  .

##### • 1<sup>er</sup> cas : $\Delta > 0$ :

Donc l'équation caractéristique a deux solutions réelles sont :  $r_1$  et  $r_2$  . D'où la solution générale de (E) sont les fonctions de la forme :  $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$  ;  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$  .

##### • 2<sup>er</sup> cas : $\Delta = 0$

Donc l'équation caractéristique a une solution réelle est  $r_1$  . D'où la solution générale de (E) sont les fonctions de la forme : sont les fonctions de la forme :  $f(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_1 x}$  ;  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$  .

##### • 3<sup>ième</sup> cas : $\Delta < 0$ :

Donc l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées sont :  $r_1 = p + qi$  et  $r_2 = \overline{r_1} = p - qi$  . D'où la solution générale de (E) sont les fonctions de la forme :  $f(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)) e^{px}$  ;  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$  .

#### c. Exemples :

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y'' - 5y' + 6y = 0$  .

2. Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y'' + y' + y = 0$  .

3. Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y'' - 4y' + 4 = 0$  .