I. Approche sur l'ensemble des nombres complexes :

a. Activité :

1. On considère l'équation $x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$.
2. On considère l'équation : $(E) : x^2 - 2x + 2 = 0$.
   - Vérifie que l'équation (E) s'écrit de la forme suivante : $(E) : (x-1)^2 + 1 = 0$.
   - Vérifie que $1+i$ et $1-i$ sont solutions de (E) .

b. Vocabulaire et notation :

- Les nombres $1+i$ et $1-i$ sont appelés nombres complexes .
- En général : un nombre complexe est écrit de la forme $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Le nombre complexe : $z' = a - bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est appelé le nombre complexe conjugué de z noté $\overline{z}$ d'où $\overline{z} = a - bi$

  Exemple : $z = 2 + 5i$ et $z' = -7 - 3i \Rightarrow \overline{z} = \overline{2+5i} = 2 - 5i$ et $\overline{z'} = \overline{-7-3i} = -7 + 3i$
- L'écriture $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est appelée l'écriture (ou la forme) algébrique de z.
- Le réel a est appelé la partie réelle et on note $\text{Re}(z) = a$. Exemple : $\text{Re}(2+3i) = 2$.
- Le réel b est appelé la partie imaginaire et on note $\text{Im}(z) = b$. Exemple : $\text{Im}(2+3i) = 3$.

c. Définition :

- Un nombre complexe est un nombre tel que son écriture est de la forme $z = a + bi$ avec a et b de $\mathbb{R}$, i est un nombre imaginaire avec $i^2 = -1$.
- Les nombres complexes constituent un ensemble est appelé ensemble des nombres complexes , on note $\mathbb{C}$.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni des deux opérations l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$ et qui ont mêmes propriétés de l'addition et de la multiplication dans IR (commutativité – associativité ….).
- $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$.

II. Operations dans l'ensemble $\mathbb{C}$:

a. Operations :

$z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$ de $\mathbb{C}$ avec x et y et x' et y' de $\mathbb{R}$. on a :

❖ **Addition dans $\mathbb{C}$** : $z + z' = x + yi + x' + y'i = (x + x') + (y + y')i$. $x, y; x'$ et $y' \in \mathbb{R}$

❖ **Multiplication dans $\mathbb{C}$** : $z \times z' = (x + yi) \times (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i$.

cas particulier $k \in \mathbb{R}$: $k.z = k.(x + yi) = kx + kyi$.

❖ **L'inverse de** $z = a + bi \neq 0 \left((a,b) \neq (0,0)\right)$: $\frac{1}{z'} = \frac{1}{x' + y'i} = \frac{1 \times \overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \frac{1 \times (x' - y'i)}{(x' + y'i)(x' - y'i)} = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} - \frac{y'}{x'^2 + y'^2} i$

❖ **Le quotient de z par z'** : $\frac{z}{z'} = \frac{x + yi}{x' + y'i} = \frac{z \times \overline{z'}}{z' \times \overline{z'}} = \frac{1}{z' \times \overline{z'}} \times z \times \overline{z'}$

$$= \frac{1}{x'^2 + y'^2} \times (x + yi)(x' - y'i) = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2} i$$

b. Applications :

- $z+z'=1+5i+2-3i$
- $z\times z'=(1+5i)\times(2-3i)$
- $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{1+5i}{2-3i}$
- $-3\times z$
- $\dfrac{1}{z'}=\dfrac{1}{2-3i}$
- $z_1=2+5i-(-4+2i)$
- $z_2=2+5i-3i(-4+2i)$
- $z_3=(2+5i)(-4+2i)$

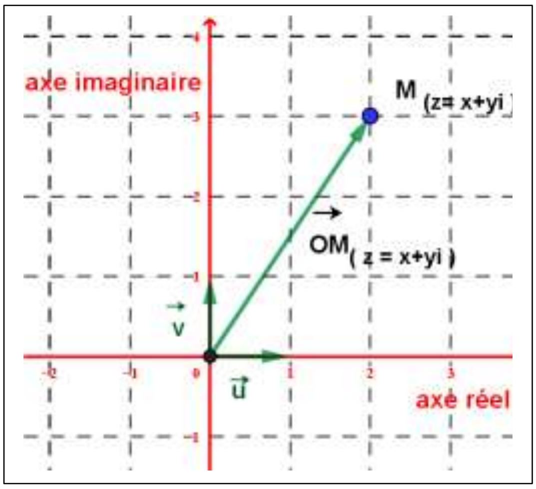
c. Remarque :

- $(a+bi)^2=a^2+2abi+(bi)^2=a^2+2abi-b^2$.
- $(a-bi)^2=a^2-2abi+(-bi)^2=a^2-2abi-b^2$.
- $(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$.

III. Présentation géométrique d'un nombre complexe :

a. Activité :

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$.



- A tout nombre complexe $z=x+yi$ de $\mathbb{C}$ on lui associe le point $M(x,y)$ de (P) càd :

$f: \quad \mathbb{C}\to(P)$

$z=x+yi\mapsto f(z)=f(x+yi)=M(x,y)$ (ou bien $\overrightarrow{OM}=x\vec{u}+y\vec{v}$)

❖ **Dans ce cas :**

- Le plan (P) est appelé le plan complexe .
- le point $M(x,y)$ est l'image du complexe $z=x+yi$.
- on note $M_{(z)}$ ou $M_{(x+yi)}$ on lit le point M d'affixe z .
  de même pour le vecteur $\overrightarrow{OM}_{(z)}$.
- on note aussi z_M on lit z est l'affixe de M . de même pour $z_{\overrightarrow{OM}}$.
- Si $z=a\in\mathbb{R}$ alors M est sur l'axe des abscisses sera nommé axe réel .
- Si $z=bi$, $(b\in\mathbb{R})$ alors M est sur l'axe des ordonnés sera nommé axe imaginaire .

b. Propriétés des affixes :

$A(z_A)$; $B(z_A)$;$C(z_C)$ et $I(z_I)$ sont trois points du plan complexe (P) .

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe z_B-z_A .
- Le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $k(z_B-z_A)$.
- Le point I milieu de $[A,B]$ a pour affixe $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.
- $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$; $(k\in\mathbb{R})$ càd $z_C-z_A=k(z_B-z_A)$ ou bien $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=k\in\mathbb{R}$ d'où les points A et B et C sont alignés (avec $z_B-z_A\neq 0$)

c. Application :

On considère $C(z_C=5+xi)$; $B(z_B=-2+i)$; $A(z_A=2+i)$ et $I(z_I)$ quatre points du plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$.

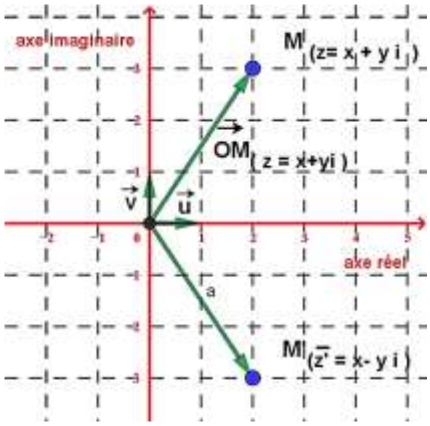
1. Déterminer $z_{\overrightarrow{AB}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer z_I affixe du point I milieu du segment $[AB]$.
3. Déterminer k tel que A et B et C sont alignés .

IV. Conjugué d'un nombre complexe $z = x + yi$:

a. Définition :

> Le nombre complexe $z' = x - yi$ est appelé le conjugué du nombre complexe $z = x + yi$ on note $z' = \overline{z} = x - yi$.

b. Interprétation géométrique :



c. Applications :

- $z = 1 + 5i$
- $z = 2i$
- $z = 1$
- $z = -1 - 3i$
- $z = -6i$

d. Propriétés :

> Soient : $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$ de complexes de $\mathbb{C}$ avec x , y , x' et y' de $\mathbb{R}$ on a :
>
> - $z + \overline{z} = 2x = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2yi = 2\operatorname{Im}(z)i$.
> - $\overline{\overline{z}} = z$ et $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$ et $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
> - $(z' \neq 0)$; $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ et $\overline{z^p} = \left(\overline{z}\right)^p$; $p \in \mathbb{Z}$ (avec $z \neq 0$ si $p \in \mathbb{Z}^-$).

e. Application :

- $\overline{\overline{2 + 3i}}$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{1 + 5i}\right)}$
- $(2 + 3i)^n = (2 - 3i)^n$.
- $\overline{(2 + 3i) + 1 - 2i}$
- $\overline{\left(\dfrac{2 + 3i}{1 - 5i}\right)}$
- $\overline{(2 + 3i) \times (1 - 5i)}$

f. Remarque :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$ (c.à.d. z est un réel pur).
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$ (c.à.d. z est un imaginaire pur).

V. Module d'un nombre complexe $z = x + yi$:

a. Activité :

$M_{(z=x+yi)}$ est un point du plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Calculer : $z \times \overline{z}$.
2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Calculer : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$, que peut-on déduire ?

b. Définition :

> Soit $z = x + yi$ de $\mathbb{C}$ avec x et y de $\mathbb{R}$.
>
> Le nombre réel positif $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ s'appelle le module de z sera noté $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

c. Application :

- $|5|$
- $|2i|$
- $|1 + i|$

d. **Interprétation géométrique du module de z :**

On a : $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ avec M d'affixe $z = x + yi$ .D'où : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = |z_B - z_A|$.

e. **Remarque :**

Soient $z_A = x_A + y_A i$ et $z_B = x_B + y_B i$ et $z_C = x_C + y_C i$ les affixes des points A et B et C avec $z_A \neq z_C$

- $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \dfrac{AB}{AC}$ donc si on a $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \dfrac{AB}{AC} = 1$ alors le triangle ABC est isocèle en A .

f. **Application :**

Soient $A(z_A = 1+i)$; $B(z_A = -1+i)$ et $C(z_C = 3i)$ trois points du plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC .
2. En déduit la nature du triangle ABC .

g. **Propriétés du module d'un nombre complexe :**

$\lvert\bar{z}\rvert = \lvert -z\rvert = \lvert z\rvert = \lvert -\bar{z}\rvert$	$\lvert z+z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$	$\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$
$\left\lvert\dfrac{1}{z'}\right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z'\rvert}$; $\left\lvert\dfrac{z}{z'}\right\rvert = \dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$ $(z' \neq 0)$	$\lvert z \times z'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\lvert z^p\rvert = \lvert z\rvert^p$, $p \in \mathbb{Z}$ et $z \neq 0$

h. **Application :**

- $\left|\overline{1+i}\right|$ $\qquad$ $|(1-i)\times(2+3i)|$
- $\left|\dfrac{1+i}{2}\right|$ $\qquad$ $\left|(1+i)^6\right|$

i. **Exercice :**

Calculer les modules des nombres complexes suivants :

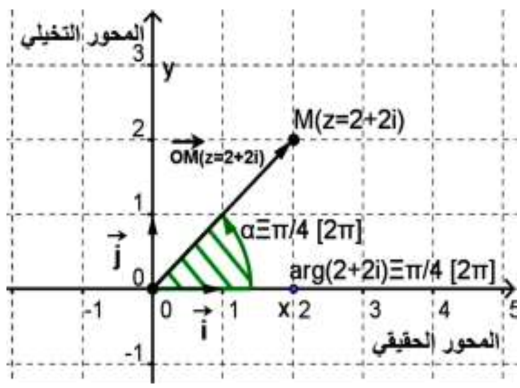
- $z_1 = -5+3i$ et $z_2 = 4i(-2+3i)$ et $z_3 = 1+i\sqrt{3}$ et $z_4 = 5+i5\sqrt{3}$.
- $z_5 = \dfrac{7}{1-i\sqrt{3}}$ et $z_6 = \dfrac{4(1+i)}{2i\left(-5-i5\sqrt{3}\right)}$ et $z_7 = \dfrac{4(1+i)^2}{2i\left(-5-i5\sqrt{3}\right)^6}$.

VI. Argument d'un nombre complexe non nul $z = x + yi$:

a. **Activité :**

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. $M_{(z)}$ avec $z = 2+2i$

1. Construire le point M dans le plan complexe (P) .
2. Donner une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$, puis toute les mesures .



b. Vocabulaire :

- $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$, on l'appelle aussi argument du nombre complexe $z=2+2i$
- Aussi toute mesure parmi les mesures $\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $(k\in\mathbb{Z})$ de l'angle orienté $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$ est appelé aussi argument du nombre complexe non nul $z=2+2i$.
- Argument du nombre complexe non nul $z=2+2i$ est noté $\arg(z)\equiv\overline{\left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM}\right)}\ [2\pi]$ ou

$\arg(2+2i)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

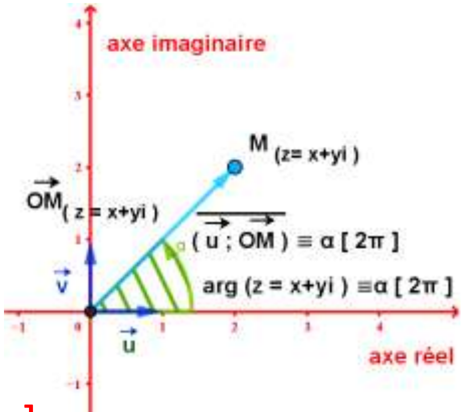
- En général si $z\in\mathbb{C}^*$ et $\overline{\left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM}\right)}\equiv\alpha\ [2\pi]$ on écrit $\arg(z)\equiv\alpha\ [2\pi]$ ou encore

$\arg(z)=\alpha\ +2\,k\,\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$.

- On préfère de prendre $\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]$ (c.à.d. la mesure principale de l'angle orienté $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$ avec $M\neq O$.
- Le nombre complexe non nul $z=0$ n'a pas d'argument ($\overrightarrow{OM}=\vec{0}$ d'où l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$ n'est pas déterminé) .

c. Définition :

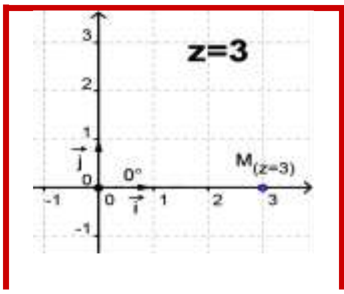
> $M_{(z)}$ ($M_{(z)}\neq O$ donc $z\neq 0$) est un point du plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $\left(0,\vec{u},\vec{v}\right)$.
>
> Toute mesure α de l'angle orienté $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$ s'appelle argument du nombre complexe non nul z .
>
> On note : $\arg(z)\equiv\alpha\ [2\pi]$; d'où $\arg(z)\equiv\overline{\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)}\ [2\pi]$ ou $\arg(z)=\alpha+2k\pi$; $k\in$

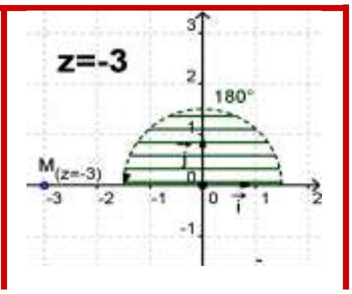


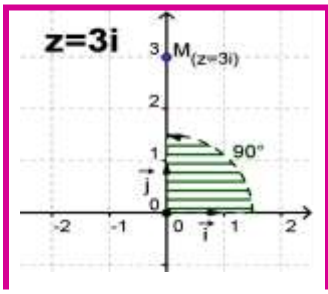
d. Remarque :

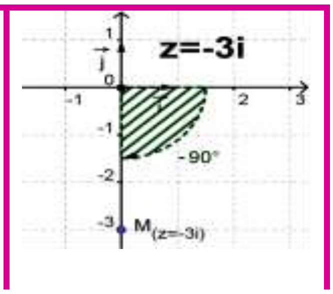
- $z=a>0$ alors $\arg(a)\equiv 0\ [2\pi]$ et $z=a<0$ alors $\arg(a)\equiv\pi\ [2\pi]$.
- $z=bi$; $b>0$ alors $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $z=bi$; $b<0$ alors $\arg(a)\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- $\arg(-z)\equiv\pi+\arg(z)[2\pi]$ et $\arg(\bar{z})\equiv-\arg(z)[2\pi]$ (sans oublier $z\neq 0$) .

e. Exemples









f. **Exercice :**

1. Dans le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$ construire les points suivants : $M_{1(z_1=2)}$ et $M_{2(z_2=-3)}$ et $M_{3(z_3=2i)}$ et $M_{4(z_4=-3i)}$ et $M_{5(z_5=1+i)}$ et $M_{6(z_6=1-i)}$ et $M_{7(z_7=2+2i)}$ et $M_{8(z_8=-1-i)}$.
2. En déduit les arguments des affixes des points précédents .

g. **Propriétés des arguments :**

z et z' deux complexes non nuls	
$\arg(z\times z')\equiv\arg z+\arg z'\ [2\pi]$	$p\in\mathbb{Z}$; $\arg(z^p)\equiv p\times\arg z\ [2\pi]$
$\arg\left(\frac{1}{z'}\right)\equiv-\arg z'\ [2\pi]$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg z-\arg z'\ [2\pi]$
Si $k>0$ alors $\arg(kz)\equiv\arg(z)\ [2\pi]$	Si $k>0$ alors $\arg(kz)\equiv\pi+\arg(z)\ [2\pi]$

VII. écriture trigonométrique (forme trigonométrique) D'un nombre complexe non nul :

a. **Définition et propriété :**

Soit $z=x+yi$ un nombre complexe non nul tel que $\arg(z)\equiv\alpha\ [2\pi]$ et $r=|z|$.

• Le nombre complexe non nul z s'écrit de la forme suivante : $z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ ou $z=\sqrt{x^2+y^2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ ou $z=[\ |z|\ ,\arg(z)]=[r,\alpha]$.

Chaque écriture précédente est appelé la forme (ou l'écriture) trigonométrique du nombre complexe non nul $z=x+yi$.

d. **Application :**

On donne la forme (ou l'écriture) trigonométrique

• $z_1=2$ *$z_2=-5$ • $z_3=7i$ • $z_4=-\frac{3}{5}i$ • $z_5=1+i$

e. **Remarque :**

• $z=a>0$ alors $z=[a,0]$, $z=a<0$ alors $z=[-a,\pi]$.

• $z=bi$; $b>0$ alors $\left[b,\frac{\pi}{2}\right]$, $z=bi$; $b<0$ alors $\left[b,-\frac{\pi}{2}\right]$.

• Si $z=[r,\alpha]$ alors $-z=[r,\pi+\alpha]$ et $\bar{z}=[r,-\alpha]$ et $-\bar{z}=[r,\pi-\alpha]$.

f. **Application :**

• **exemple :** $z=3=[3,0]$ et $z=-3=[3,\pi]$. $z=3i=\left[3,\frac{\pi}{2}\right]$ et $z=-3i=\left[3,-\frac{\pi}{2}\right]$.

• **exemple :** on a : $z=1+i$

• cas particulier : $1+i=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$ et $1-i=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$ et $z_3=1+i\sqrt{3}=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$ et $z_4=1-i\sqrt{3}=\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]$.

VIII. Operations sur les formes trigonométriques :

a. Activité :

z et z' deux complexes non nuls tel que :

$z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ et $z'=[r',\alpha']=r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$.

- Le produit de $z\times z'$:

b. Propriété :

z et z' deux complexes non nuls tel que :

$z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ et $z'=[r',\alpha']=r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$ on a :

Les opérations	$z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $z'=[r',\alpha']=r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$
Produit : $z\times z'$	$z\times z'=[r,\alpha]\times[r',\alpha']=[r\times r',\alpha\times\alpha']$ ou $zz'=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\times r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$ $=rr'(\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha'))$
Produit : $\underbrace{z\times z\times\cdots z}_{\text{n fois}}=z^n$ Formule de MOIVRE	$z^n=[r,\alpha]^n=[r^n,n\alpha]$ $z^n=(r(\cos\alpha+i\sin\alpha))^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$ Cas particulier $r=1$: $[1,\alpha]^n=[1^n,n\alpha]=[1,n\alpha]$ ou encore $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$ formule de MOIVRE
Inverse	$\frac{1}{z'}=\frac{1}{[r',\alpha']}=[r',-\alpha']$ ou $\frac{1}{z'}=\frac{1}{r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')}=\frac{1}{r'}(\cos(-\alpha')+i\sin(-\alpha'))$
Quotient	$\frac{z}{z'}=\frac{[r,\alpha]}{[r',\alpha']}=\left[\frac{r}{r'},\alpha-\alpha'\right]$ ou $\frac{z}{z'}=\frac{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')}=\frac{r}{r'}(\cos(\alpha-\alpha')+i\sin(\alpha-\alpha'))$

c. Remarque :

Si $z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ alors :

- $-z=-1\times z=[1,\pi][r,\alpha]=[r,\alpha+\pi]=r((\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)))$.
- $\bar{z}=\overline{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=r(\cos\alpha-i\sin\alpha)=r(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))=[r,-\alpha]$.

IX. Notation exponentielle ou écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul :

a. Définition :

- L'écriture trigonométrique de $z=[r,\alpha]=[|z|,\arg z]$ sera notée de la manière suivante

$z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)=re^{i\alpha}$

- $z=re^{i\alpha}$ s'appelle l'écriture exponentielle ou la forme exponentielle de z non nul
- propriétés : $\left(e^{i\alpha}\right)^n=e^{in\alpha}$; $\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}=e^{i(\alpha-\beta)}$; $\dfrac{1}{e^{i\beta}}=e^{i\beta}$; $e^{i\alpha}\times e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)}$ avec α et β de $\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$.

b. Formules d' EULER :

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ on pose on a : $z=[1,\alpha]=\cos\alpha+i\sin\alpha$ est un nombre complexe de module 1 et d'argument α. Donc $z=\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$ d'où :

formules d' EULER $\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=\dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\end{cases}$

Remarque : avec $z=\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$

D'après formule de Moivre on a :

$$z^n=[1,\alpha]^n=\left(e^{i\alpha}\right)^n=e^{in\alpha}=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$

$$\left(\overline{z}\right)^n=[1,-\alpha]^n=\left(e^{-i\alpha}\right)^n=e^{-in\alpha}=\cos n\alpha-i\sin n\alpha$$

D'où :

- $e^{in\alpha}+e^{in\alpha}=z^n+\left(\overline{z}\right)^n=2\cos n\alpha$
- $e^{in\alpha}-e^{in\alpha}=z^n-\left(\overline{z}\right)^n=2i\sin n\alpha$.
- $e^{in\alpha}\times e^{in\alpha}=z^n\times\left(\overline{z}\right)^n=1$

c. Application linéarisation :

- On linéarise $\cos^3 x$.

D'après formules d'EULER : $\cos\alpha=\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ d'où :

$$\cos^3 x=\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^3=\frac{1}{2^3}\left(z+\overline{z}\right)^3=\frac{1}{8}\left(z^3+3z^2\overline{z}+3z\left(\overline{z}\right)^2+\left(\overline{z}\right)^3\right)=\frac{1}{8}\left(z^3+\left(\overline{z}\right)^3+3z\overline{z}\times\left(z+\overline{z}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos 3x+3\times1\times2\cos x\right)=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x.$$

X. Equation du deuxième degré :

01. Equation de la forme $z \in \mathbb{C}$: $z^2 = a$ avec $a \in \mathbb{R}$:

a. Activité :

1. Résoudre les équations suivantes :

- $z \in \mathbb{C} / z^2 = 0$.
- $z \in \mathbb{C} / z^2 = 2$.
- $z \in \mathbb{C} / z^2 = -2$.

2. Donner la propriété :

b. Propriété :

Soit a est un réel , ensemble des solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C}$: $z^2 = a$ est :

- Si $a = 0$ alors $S = \{0\}$.
- Si $a > 0$ alors $S = \left\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\right\}$.
- Si $a < 0$ alors $S = \left\{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\right\}$.

02. Equation du $2^{ième}$ degré de la forme $z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$; $a \in \mathbb{R}^*$ $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$:

a. Activité :

Résoudre l'équation suivante : $(F) : z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$.

b. Théorème :

Equation du $2^{ième}$ degré de la forme $z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$; $a \in \mathbb{R}^*$ $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ a pour solutions :

- 1^{er} cas $\Delta = 0$: l'équation a une solution double $z = -\frac{b}{2a}$
- $2^{ième}$ cas $\Delta > 0$: l'équation à deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $3^{ième}$ cas $\Delta < 0$:l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

c. Remarque :

- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$.
- $\Delta \neq 0$ alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
- $\Delta = 0$ alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2$.

d. Application :

On considère l'équation suivante : $(E) : z \in \mathbb{C} / z^2 + z + 1 = 0$.

1. Calculons Δ le discriminant de l'équation .
2. On déduit les solutions de l'équation :

XI. L'écriture complexe des transformations suivantes : translation – homothétie – rotation .

01. Vocabulaire :

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$.

• On considère la relation suivante : cette relation à tout point $M_{(z)}$ de (P) d'affixe z on associe le point $M'_{(z')}$ de (P) d'affixe z'.

• Cette relation est notée f ou g et appelée transformation dans le plan (P) .

• Cette transformation est représentée de la manière suivante : $\begin{array}{l} f\ :\ (P)\to(P) \\ M_{(z)}\mapsto f\left(M_{(z)}\right)=M'_{(z')} \end{array}$

• L'écriture : $z'=f(z)$ est appelée l'écriture complexe du transformation f

02. L'écriture complexe de certains transformation f :

A. L'écriture complexe d'une translation $f=t_{\vec{u}}$:

a. Rappel :

Translation : $f=t_{\vec{u}}$ est définie par pour tout point M de (P) on a : $f(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

b. Remarque :

$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{MM'}}=Z_{\vec{u}}\Leftrightarrow z'-z=u$ avec $M_{(z)}$ et $M'_{(z')}$ et $\vec{u}_{(b)}$.

c. Propriété :

> • L'écriture complexe du translation $f=t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ d'affixe le complexe b est $z'-z=b$ ou bien $z'=z+b$.
>
> • Toute transformation f dans le plan complexe qui transforme $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ tel que : $z'=z+b$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe le complexe b :

d. Application :

• On considère la transformation f qui associe tout point $M_{(z)}$ de (P) d'affixe z on associe le point $M'_{(z')}$ de (P) d'affixe z' tel que : $z'=z+2-3i$.

1. on détermine la nature de cette transformation f :

B. L'écriture complexe d'une homothétie $f=h(\Omega,k)$:

e. Rappel :

Homothétie : $f=h(\Omega,k)$ Ω est le centre de l'homothétie et k le rapport de l'homothétie

Homothétie : $f=h(\Omega,k)$ est définie par pour tout point M de (P) on a : $f(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

f. Remarque :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}&\Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{\Omega M'}}=Z_{k\overrightarrow{\Omega M}}\\&\Leftrightarrow z'-\omega=k(z-\omega)\end{aligned}$$ avec $M_{(z)}$ et $M'_{(z')}$ et $\Omega_{(\omega)}$.

g. Propriété :

- L'écriture complexe de l'homothétie $f = h(\Omega, k)$ de centre le point Ω et de rapport k non et différent de 1 ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ est $z' - \omega = k(z - \omega)$ ou bien $z' = kz + b$ avec $(b = \omega - k\omega \in \mathbb{C})$.
- Toute transformation f dans le plan complexe qui transforme $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ tel que : $z' = kz + b$ est une homothétie :
  - ❖ de centre le point $\Omega_{(\omega)}$,Ω est un point invariant par f c.à.d. $f(\Omega) = \Omega$ ou $\omega = k\omega + b$ d'où $\omega = \frac{b}{1 \quad k}$
  - ❖ De rapport $k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

h. Application :

- On considère la transformation f qui associe tout point $M_{(z)}$ de (P) d'affixe z on associe le point $M'_{(z')}$ de (P) d'affixe z' tel que : $z' = 2z + 1 + i$.

1. on détermine la nature de cette transformation f :

C. L'écriture complexe d'une rotation $f = r(\Omega, \theta)$:

i. Rappel :

Rotation : $f = r(\Omega, \theta)$ Ω est le centre de de la rotation r et θ est l'angle de la rotation r (θ est mesure)

La rotation : $f = r(\Omega, \theta)$ est définie par pour tout point $M \neq \Omega$ de (P) on a :

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \alpha \ (2\pi) \end{cases}$$ et pour Ω on a : $f(\Omega) = \Omega$ (Ω est un point invariant)

j. Remarque :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = Z_{k\overrightarrow{\Omega M}}$$
$$\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$
avec $M_{(z)}$ et $M'_{(z')}$ et $\Omega_{(\omega)}$.

k. Propriété :

- L'écriture complexe de la rotation $f = r(\Omega, \theta)$ de centre le point Ω et d'angle θ est $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ ou bien $z' = ze^{i\theta} + b$ avec $(b = \omega - \omega e^{i\alpha} \in \mathbb{C})$.
- Toute transformation f dans le plan complexe qui transforme $M_{(z)}$ au point $M'_{(z')}$ tel que : $z' = az + b$ avec $a \neq 1$ et $|a| = 1$ (ou $z' = ze^{i\theta} + b$) est une rotation :
  - ❖ de centre le point $\Omega_{(\omega)}$ Ω est un point invariant par f c.à.d. $\omega = a\omega + b$ (ou $\omega = e^{i\theta}\omega + b$) d'où :
    $\omega = \frac{b}{1 - a}$ ou $\omega = \frac{b}{1 - e^{i\theta}}$.
  - ❖ D'angle $\arg(a)$ (2π) (ou $\theta \equiv \arg(e^{i\theta})$ (2π)) ou encore $\theta \equiv \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right)$ (2π) .

l. Application :

- On considère la transformation f qui associe tout point $M_{(z)}$ de (P) d'affixe z on associe le point $M'_{(z')}$ de (P) d'affixe z' tel que : $z' = -iz + 1 - i$

2. on détermine la nature de cette transformation f :

c. Exercice :

Parmi les écritures complexes des transformations suivantes indiqué la nature et les éléments caractéristiques de chaque transformation .

1. $z' = -4z - 2 + 5i$.

2. $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i$.

2. Pour $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i$.

d. Résumé pour les transformations précédentes :

Rappel Transformation est :	Ecriture complexe	Transformation donnée de la forme f transforme le point $M_{(z')}$ au point $M'_{(z')}$ avec $z' = az + b \;;(a,b \in \mathbb{C})$ Le programme se limite à trois cas les valeurs de a
Translation : $f = t_{\vec{u}}$ $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' - z = b$ ou bien $z' = z + b$	1[er] cas $a = 1$ on a : $z' = z + b$ Nature de la transformation : f est une Translation Eléments caractéristiques : • b est l'affixe du vecteur $\vec{u}$ de la translation f .
Homothétie : $f = h(\Omega, k)$ Ω centre de l'homothétie k rapport de l'homothétie définition : $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$ ou bien $z' = kz + b$ $(b = \omega - k\omega \in \mathbb{C})$	2[ième] cas $a = k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ on a : $z' = kz + b$ Nature de la transformation f : f est une Homothétie Eléments caractéristiques : • k rapport de l'homothétie f
		• $\omega = \frac{b}{1-k} = \frac{b}{1-a}$ est l'affixe du centre Ω de l'homothétie f • Remarque : Ω est invariant par f donc $f(\Omega) = \Omega$ D'où : $z' = kz + b \Leftrightarrow \omega = k\omega + b$ donc $\omega = \frac{b}{1-k}$
Rotation : $f = r(\Omega, \alpha)$ Ω centre de l'homothétie α angle de rotation définition : $f(M) = M' \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \alpha \;(2\pi) \end{cases}$	$z' - \omega = (z - \omega)e^{i\alpha}$ ou bien $z' = e^{i\alpha}z + b$ $(b = \omega - \omega e^{i\alpha})$	3[ième] cas $\lvert a \rvert = 1$ on a : $z' = e^{i\alpha}z + b$ ou $z' = az + b = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z + b$ ou $z' = (x + yi)z + b \;;(\text{avec} \lvert x + yi \rvert)$ Nature de la transformation f : f est une Rotation Eléments caractéristiques : • α ou $\arg(x + yi)$ est l'angle de la rotation . • Ou $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-e^{i\theta}} = \frac{b}{1-(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{b}{1-(x+yi)}$ $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-e^{i\theta}}$ est l'affixe du centre Ω de la rotation f • Remarque : ❖ Ω est invariant par f donc $f(\Omega) = \Omega$ D'où : $z' = az + b \Leftrightarrow \omega = k\omega + b$ donc $\omega = \frac{b}{1-a}$. ❖ De même : $\alpha \equiv \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \;(2\pi)$

<table>
<tr><td colspan="2">A et B et C et D et I cinq points du plan complexe tel que leurs affixes sont z_A et z_B et z_C et z_D et z_I</td></tr>
<tr><td>• $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = |z_B - z_A|$
• $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ affixe de I milieu de $[AB]$</td><td>Mesure de $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$ est :
$\overline{\left(\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{AB}\right)} \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$</td></tr>
<tr><td>$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_C - z_A = k(z_B - z_A)$
$\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$; $(A \neq B)$</td><td>Mesure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ est :
$\overline{\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}\right)} \equiv \arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A})\ [2\pi]$</td></tr>
<tr><td>A et B et C sont alignés équivaut à : $(\arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv \pi[2\pi]$ ou $\arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv 0[2\pi]$)
<u>Remarque</u> : $\left(\arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv 0[2\pi] \text{ ou } \arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv \pi[2\pi]\right)$
équivaut à $\arg(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}) \equiv 0\ [\pi]$</td><td>$Z_{\vec{w}}$ et $Z_{\vec{t}}$ affixes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a
$\overline{\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)} \equiv \arg\left(Z_{\vec{u}}\right) - \arg\left(Z_{\vec{v}}\right)\ [2\pi]$
ou
$\overline{\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)} \equiv \arg\left(\dfrac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}}\right)\ [2\pi]$</td></tr>
<tr><td>$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut $\dfrac{Z_{\vec{u}}}{Z_{\vec{v}}} \in \mathbb{R}\ \left(Z_{\vec{v}} \neq 0\right)$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut $\Leftrightarrow \dfrac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}} = bi$;$\left(b \in \mathbb{R}^*\right)\ \left(Z_{\vec{v}} \neq 0\right)$
$\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$</td><td>A et B et C et D sont alignés ou cocycliques équivaut à
$\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \dfrac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$(AB)//(CD) \Leftrightarrow \arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv \pi\ [2\pi]$ ou $\arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv 0\ [2\pi]$
$\Leftrightarrow \arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv 0\ [\pi]$</td><td>$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overline{\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
$\Leftrightarrow \arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$</td></tr>
</table>

Relation complexe	Signification géométrique
L'ensemble des M d'affixe z tel que : $\lvert z - z_A\rvert = \lvert z - z_B\rvert$	1. $AM = BM$. M appartienne à la médiatrice du segment $[AB]$. 2. L'ensemble des M c'est la médiatrice du segment $[AB]$.
$\lvert z - z_A\rvert = k\ (k > 0)$	1. $AM = k$ 2. M appartienne au cercle de centre A et de rayon k .
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r ; \pm\dfrac{\pi}{2}\right] = re^{\pm\frac{\pi}{2}i}$	• Si $r \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ alors ABC est un triangle rectangle en A . • Si $r = 1$ alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en A .
$\left\lvert\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right\rvert = 1$	ABC est un triangle isocèle en A .
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1 ; \pm\dfrac{\pi}{3}\right] = e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$	ABC est un triangle équilatéral .

Classe :	2Bac.SVT	**Devoir Maison N° 4**	Lycée :	Prince Moulay Abdellah
Année scolaire	2022/2023	**2er Semestre**	Prof :	Rachid BELEMOU

Exercice 1 (8 pts)	
Soient A ; B ; C et D quatre points dans le plan complexe d'affixes respectifs : $z_A = 3$ et $z_B = 1+i$ et $z_C = 2-2i$ et $z_D = -i+\sqrt{3}i$	
1) a) Calculer les distances : AB et AC.	0.75
b) Calculer : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, en déduire la nature du triangle ABC.	0.75
2) Déterminer la forme trigonométrique des nombres : z_C et z_B	1.5
3) Déduire la notation exponentielle des nombres : z_C et z_B	1
4) Soit I le milieu du segment $[BD]$.	
a) Déterminer $z_I = aff(I)$ l'affixe du point I.	0.5
b) Déterminer la forme trigonométrique de z_I.	0.75
c) Déterminer la forme trigonométrique des nombres : $\frac{z_B}{z_I}$ et $z_C \times z_I$ et z_I^9	2
d) Déterminer la notation exponentielle du nombre : $z_B \times z_I \times z_C$	0.75
Exercice 2 (3.25 pts)	
1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$	1
2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, considérons les points : A et B et C et Ω d'affixes respectifs : $a = 2+i$ et $b = 2-i$ et $c = i$ et $w = 1$.	
a) Montrer que : $\frac{a-w}{b-w} = i$ en déduire que le triangle ΩAB est isocèle et rectangle en Ω.	0.75
b) Soit R la rotation du centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et qui transforme le poins M d'affixe z en point M' d'affixes z'. Montrer que : $z' = iz + 1 - i$	0.75
c) Montrer que : $R(A) = C$	0.75
Exercice 3 (2.5 pts)	
1) Résoudre l'équation : $\frac{e^{x^2-3x}}{e^{x-3}} = e^{x-3}$	1
2) Résoudre l'inéquation : $e^{2x} + e^x - 2 < 0$	1
3) Calculer la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^3 - x^2$	0.5
Exercice 4 (6.25 pts)	
I). Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 1$	
1). Étudier les variations de la fonction g. (Résoudre l'équation : $2e^x - 1 = 0$)	1
2). En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $g(x) \geq 0$	0.5
II). Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{2x} - 2xe^x - 2$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$.	
1). Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, et représenter géométriquement le résultat.	0.75
2). Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et représenter géométriquement les résultats. (Vérifier que $f(x) = xe^x\left(2\frac{e^x}{x} - 2\right) - 2$)	1.5
3). a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = 2g(x)e^x$	1
b) En déduire que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$	0.5
c) Construire la courbe (C)	1