I/ Continuité et continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point x_0 :

A. Continuité d'une fonction en un point x_0 :

a. Définition :

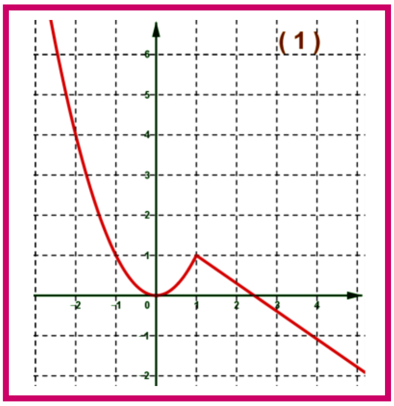
- f est une fonction définition sur D_f , I_{x_0} est un intervalle ouvert et contient x_0 et inclus dans D_f .

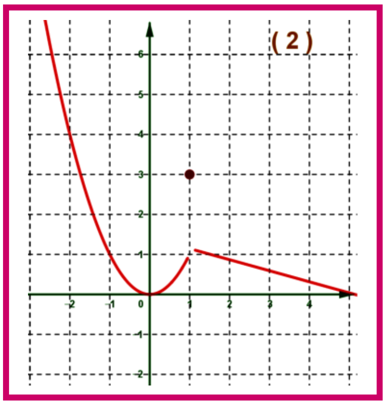
  f est continue au point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

b. Exemple :

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{|x| - 1} \ ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \\ f(1) = 1 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f au point $x_0 = 1$.
2. La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction f





** Exercices : 4,5,6,7,8,9 de la série

B. Continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point x_0 :

a. Définition :

f est une fonction définition sur D_f , $I_d = [x_0, x_0 + r[$; $(r > 0)$ est un intervalle inclus dans D_f .

- f est continue à droite du point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<0}} f(x) = f(x_0)$.

f est une fonction définition sur D_f , $I_g =]x_0 - r, x_0]$; $(r > 0)$ est un intervalle inclus dans D_f .

- f est continue à gauche du point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<0}} f(x) = f(x_0)$.

b. propriété :

f est continue au point x_0 si et seulement si f continue à droite et à gauche de x_0

Ou encore : (f est continue au point x_0) $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<0}} f(x) = f(x_0)$

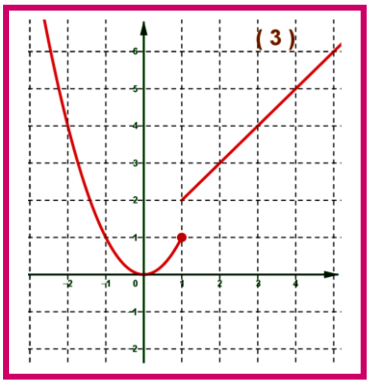
c. Exemple :

➢ **Exemple 1 :**

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=x+a\sqrt{x^2+x+1} & ; x\leq 0 \\ f(x)=x^2\text{-}x & ; 0<x\leq 1 \\ f(x)=bx-\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} & ; x>1 \end{cases}$ avec a et b de $\mathbb{R}$

1. Déterminer a et b pour que la fonction f soit la continue au point $x_0=0$ et $x_1=1$.

➢ **Exemple 2 :**



2. La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction f .
- Etudier graphiquement la continuité à droite et à gauche au point $x_0=1$.
- F est-elle continue au point $x_0=1$?

** Exercice : 10,11,12,13,14,15 de la série

II. Continuité sur un intervalle :

a. Définitions :

- f est continue sur un intervalle ouvert $(I=]a,b[) \Leftrightarrow$ pour tout x de I ; f est continue en x .
- f est continue sur $[a,b[\Leftrightarrow$ f est continue sur $]a,b[$ et f est continue à droite de a .
- f est continue sur $]a,b] \Leftrightarrow$ f est continue sur $]a,b[$ et f est continue à gauche de b .
- f est continue sur $[a,b] \Leftrightarrow$ f est continue sur $]a,b[$ et f est continue à droite de a et à gauche de b .

b. Exemple :

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2+3x$.

1. Montrer que f est continue sur l'intervalle $I=]1;5[$.

III. Operations sur les fonctions continues sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$:

a. Propriétés :

f est continue sur I et g est continue sur I .

- Les fonctions $f+g$ et $f\times g$ et αf , $(\alpha\in\mathbb{R})$ sont continues sur I .
- Les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I (pour $x\in I$ tel que $g(x)\neq 0$) .

IV. Continuité des fonctions usuelles :

a. Propriété :

- Toute fonction polynômiale est continue sur $D_f=\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition D_f .
- Les fonctions $f(x)=\sin x$ et $g(x)=\cos x$ sont continues sur .
- La fonction $x\mapsto \tan x$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.
- La fonction $f(x)=\ x$ est continue sur $[0,+\infty[$.

b. Exemple :

Soient les fonctions 1) $f(x)=\left(x^2+3x-2\right)\times\sqrt{x}$. 2) $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}+\cos(x)$.

1. Déterminer ensemble de définition et ensemble de la continuité de chaque fonction précédente .

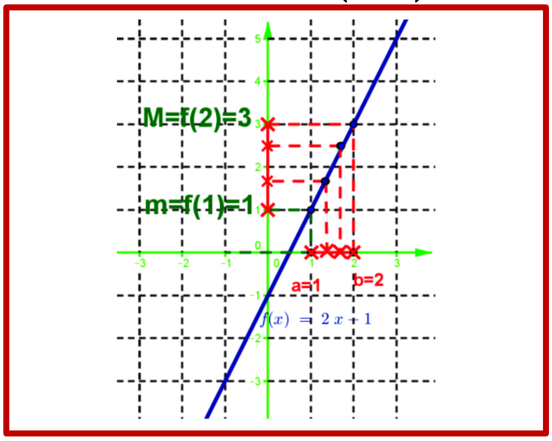
** Exercices : 16 de la série

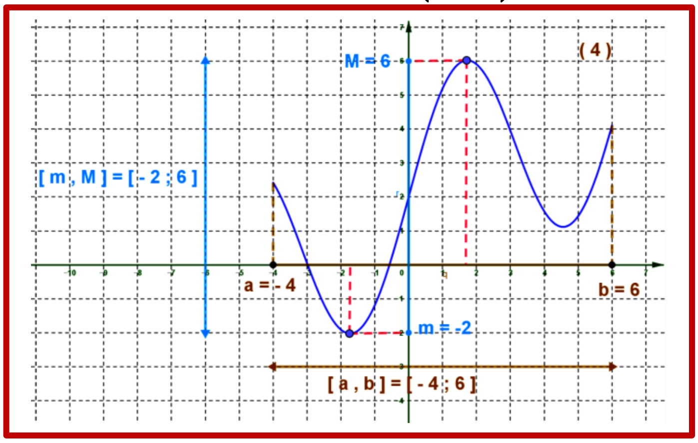
V. Image d'un intervalle par une fonction continue :

a. Propriété :

- Image du segment $[a,b]$ par une fonction continue est un segment $J=[m,M]$ (m= la plus petite image M= la plus grande image par f des éléments de $[a,b]$) $f([a,b])=[m,M]$
- Image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle J. On note $J=f(I)$.

b. Exemple : Exemple 1 : $f([1,2[)=[1,3[$ Exemple 2 : $f([a,b[)=[m,M]$





VI. Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone :

Si la fonction est continue et strictement croissante		
$f([a,b])=[f(a),f(b)]$	$f([a,b[)=\left[f(a),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$f(]a,b])=\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),f(b)\right]$
$f(]a,b[)=\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)\right[$	$f([a,+\infty[)=\left[f(a),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$f(]a,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right.$
$f(\mathbb{R})=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$	$f(]-\infty,a])=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(a)\right]$	$f(]-\infty,a[)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to a^-}f(x)\right.$
Si la fonction est continue et strictement décroissante		
$f([a,b])=[f(b),f(a)]$	$f([a,b[)=\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),f(a)\right]$	$f(]a,b])=\left[f(b),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right.$
$f(]a,b[)=\left]\lim\limits_{x\to b^-}f(x),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right[$	$f([a,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(a)\right]$	$f(]a,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right.$
$f(\mathbb{R})=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$	$f(]-\infty,a])=\left[f(a),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$	$f(]-\infty,a[)=\left]\lim\limits_{x\to a^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right.$

VII. Continuité de la composée de deux fonctions continues :

** Exercice : 20,21 de la série

a. Théorème :

$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ est contine en } x_0\\ \bullet\ g \text{ est contine en } f(x_0)\end{array}\right\}$ alors la fonction gof est continue en x_0

$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ est contine sur } I\\ \bullet\ g \text{ est contine en } f(I)\end{array}\right\}$ alors la fonction gof est continue sur I .

b. Applications :

- $f(x)=\sin(ax+b)$ et $g(x)=\cos(ax+b)$ sont continues sur IR .
- $h(x)=\tan(ax+b)$ est continue pour tout x tel que $ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.
- si f est positive et continue sur I alors $h(x)=\sqrt{f(x)}$ est continue sur I .

** Exercice : 17,18,19 de la série

VIII. Théorème des valeurs intermédiaires :

a. Activité :

La figure ci-contre représente la fonction f , on prend $a=-2$ et $b=1$.

1. En déduit graphiquement $f(a)$ et $f(b)$.
2. On choisit un nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, graphiquement , est-ce qu'il existe un nombre c de $[a,b]=[-2,1]$ tel que : $f(c)=k$.

b. Propriété (théorème des valeurs intermédiaires) :

f est une fonction continue sur $[a,b]$.
Pout tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un élément c de $[a,b]$ tel que : $f(c)=k$

c. Conséquences :

- Puisque la fonction f est continue on a : $f([a,b])=[m,M]$ (l'image d'un segment est un segment) .
- si $f(a)$ et $f(b)$ de signe contraire $(\text{càd} : f(a)f(b)<0)$ donc $k=0\in f([a,b])=[m;M]$ alors il existe au moins un $c\in]a,b[$ $/f(c)=0$ (sans oublier que f est continue sur $[a,b]$)
- si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a)f(b)<0$ alors l'équation $x\in]a,b[/f(x)=0$ admet au moins une solution c dans $]a,b[$.

d. remarque :

- ✓ f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$ alors c est unique
- ✓ pour montrer il existe au moins un c de $[a,b]$ ou bien l'équation admet au moins une solution alors il faut que la fonction est continue.
- ✓ pour montrer il existe un et un seul c de $[a,b]$ ou bien l'équation admet une et une seule solution alors il faut que la fonction est continue et strictement monotone.

** Exercices : 22,23,24,25,26 de la série

IX. Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I :

a. Théorème :

La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

- $f : I\mapsto J$ est une fonction si tout $x\in I$ a une et seule image y dans J et de même si tout $y\in J$ a un et seul antécédent y dans I
- on définie une autre fonction sera notée f^{-1} et appelée fonction réciproque de f avec :

$$f: \begin{array}{l} I\to J=f(I) \\ x\mapsto f(x)=y \end{array} \quad \text{et} \quad f^{-1}: \begin{array}{l} J=f(I)\to I \\ y\mapsto f^{-1}(y)=x \end{array}$$

b. Exemple :

On considère la fonction f de la variable x définie sur l'intervalle $[0,3]$ par $f(x)=x^2$.

1. Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J à déterminer .

c. Relation entre f et sa réciproque f^{-1} :

$$\left.\begin{matrix} f(x)=y \\ x\in I \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in J \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall x\in I \ : \ f^{-1}\circ f(x)=x \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall y\in J \ : \ f\circ f^{-1}(y)=y \\ \forall x\in J \ : \ f\circ f^{-1}(x)=x \end{cases}$$

d. Remarque :

Pour déterminer la fonction f^{-1}

On rédige de la façon suivante :

1ère méthode :

Soit $x\in I$ et $y\in J$ cherchons x tel que $f(x)=y$.

2ième méthode :

Soit $y\in I$ et $x\in J$ cherchons y tel que $f(y)=x$.

e. Exemple :

On considère la fonction f de la variable x définie sur l'intervalle $[0,3]$ par $f(x)=x^2$ qui admet fonction réciproque f^{-1} : $J=[0;9]\mapsto I=[0;3]$ (exemple précédent)

1. Déterminer f^{-1} :

f. Propriété de la fonction réciproque f^{-1} :

1. La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $J=f(I)$.
2. La fonction réciproque f^{-1} et f varient dans le même sens .
3. $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à la 1er bissectrice ($(D): y=x$) .

** Exercices : 27,28 de la série

X. La fonction racine d'ordre n (ou racine nième) :

a. Définition et théorème :

- La fonction $f(x)=x^n$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$) est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
- Sa fonction réciproque f^{-1} sera noté $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ et appelée La fonction racine d'ordre n (ou la fonction racine nième) .
- $f^{-1}=\sqrt[n]{\ }$: $[0,+\infty[\to[0,+\infty[$

  $x\mapsto f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{x}$ on l'appelle racine d'ordre n du réel positif x

b. Cas particuliers :

- Cas $n=1$ on a $f^{-1}(x)=\sqrt[1]{x}=x$ (pas d'importance) . donc on prend $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
- Cas $n=2$ on a $f^{-1}(x)=\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$ (racine carrée) .
- Cas $n=3$ on a $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ (racine cubique ou racine d'ordre 3) .

c. Propriétés :

Soient a et b de $\mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$			
$\sqrt[n]{1}=1$; $\sqrt[n]{0}=0$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	$\sqrt[n]{a^n}=a$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$
$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a=b$	$\sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a\le b$	$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$	$\sqrt[n\times m]{a^m}=\sqrt[n]{\ }$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[a\times m]{a}$	$(b>0)$; $\sqrt[n]{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$	$(b>0)$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

d. Exemple :

Simplifier : $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}}\times\sqrt[15]{3^{11}}$.

e. Limites de la fonction $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$:

Propriété :

- ❖ **1^er cas :** $f(x)=x$ c.à.d. $g(x)=\sqrt[n]{x}$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0}$; (avec $x_0\ge 0$) .

- ❖ **2^ième cas** le cas général : $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$

  - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\ell}$.
  - Les deux propriétés restent vraies si on remplace $x\to x_0$ par $x\to x_0^-$; $x\to x_0^+$; $x\to\pm\infty$.

f. Exemple :

Calculons les limites

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{2x+3}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{8x+8}{x+5}}$
- $\lim\limits_{x\to5^+}\sqrt[3]{\frac{8x+8}{x-5}}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[5]{5x^2+1}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{8x+8}{x-5}}$
- $\lim\limits_{x\to-1^-}\sqrt[3]{\frac{8x+8}{x-5}}$

** Exercices : 29,30,31,32,33,34,35,36,37 de la série

XI. Puissance ratio

a. Définition :

$x\in\mathbb{R}^{+*}$ et $n\in\mathbb{N}^*$ et $m\in\mathbb{Z}$ on pose $r=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$.

- Le nombre $\sqrt[n]{x^m}$ son écriture sera de la façon suivante $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ ou encore par $\sqrt[n]{x^m}=x^r$; x^r est appelé puissance rationnelle du nombre réel positif x d'exposant r .
- ($0^r=0$ avec $r\neq 0$) .

b. Remarque :

La définition de l'exposant dans $\mathbb{Q}$ c'est un prolongement de l'exposant dans .

c. Exemple :

- Ecrire les nombres suivants $\left(\sqrt[9]{7}\right)^{11}$ et $\sqrt[8]{3^{-5}}$ et $\left(\sqrt[9]{21}\right)^{-11}$ et $\sqrt[13]{2^{-15}}$ et $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{32}$ sous la forme x^{r} :

d. Propriété :

$\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall b \in \mathbb{R}^{+*}$.			
$a^{r} \rangle 0$ avec $r, r' \in \mathbb{Q}$	$a^{r} = b^{r'} \Leftrightarrow r = r'$	$a^{r} \times a^{r'} = a^{r + r'}$	$a^{r} \times b^{r} = (a \times b)^{r}$
$\left(a^{r}\right)^{r'} = a^{r \times r'}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{r} = \frac{a^{r}}{b^{r}}$	$a^{-r} = \frac{1}{a^{r}}$	$\frac{a^{r}}{a^{r'}} = a^{r - r'}$

e. Exemple :

Simplifier : $A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^{5} \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right)$.

Professeur : Rachid BELEMOU Lycée : Prince Moulay Abdellah	**Exercices:** **LES LIMITES et LA CONTINUITÉ**	Niveau : 2 BAC-PC-SVT Année : 2022–2023

Exercice1 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$ 2) $\lim_{x\to+\infty} 2x^3+x^2-x+4$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$ 4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$

5) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$ 6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

Exercice2 : (*Limites à droite et à gauche)*

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0=-1$

Exercice3 : Soient les fonctions tels que :

$f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x)=\frac{-3x+1}{x(x-2)}$ et $h(x)=\frac{x^2+1}{x^3}\sin x$

1)Déterminer : $\lim_{x\to 2} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2)Déterminer : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to 3} g(x)$

3)Déterminer : $\lim_{x\to 0} h(x)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Exercice4 : Considérons la fonction f définie

par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-6x+5}{x-1}; si...x\neq 1 \\ f(1)=-4 \end{cases}$

1) Déterminer Df 2) a) $\lim_{x\to 1} f(x)$

b) Comparer $\lim_{x\to 1} f(x)$ et $f(1)$

Exercice5 : Considérons la fonction f définie par

$f(x)=\frac{x^2+x-12}{x-3}$; $si\ x\neq 3$ et $f(3)=7$

Etudier la est continuité de f en $x_0=3$

Exercice6 : Considérons la fonction f définie

Par : $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}$; $si\ x\neq 0$ et $f(0)=1/2$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Exercice7 : Considérons la fonction f définie

Par : $f(x)=\frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}$; $si\ x\neq 0$ et $x\neq 2$ et $f(2)=1/2$

Etudier la est continuité de f en $x_0=2$

Exercice8 : Considérons la fonction f définie

Par : $\begin{cases} f(x)=\frac{\sin(\pi x)}{x-1}; si...x\neq 1 \\ f(1)=m \end{cases}$

avec m paramètre réel

déterminer la valeur du réel m pour laquelle

f est continue en $x_0=1$

Exercice9 : Considérons la fonction f définie par

$f(x)=2+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $si\ x\neq 0$ et $f(0)=2$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Exercice10 : Soit f définie sur **R** par :

$\begin{cases} f(x)=x^2; si...x\leq 0 \\ f(1)=2+x; si...x\succ 0 \end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Exercice11 : Soit f définie par :

$\begin{cases} f(x)=3-x^2; si...x\leq 0 \\ f(x)=\frac{x^2-3}{2x-1}; si...x\succ 0 \end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=0$

Exercice12 : Considérons la fonction f définie

Par : $\begin{cases} f(x)=\frac{2x+1}{7-3x}; si...x\leq 2 \\ f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}; si...x\succ 2 \end{cases}$

Etudier la est continuité de f en $x_0=2$

Exercice13 : Soit la fonction :

$f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ si $x \neq 1$ et $f(1)=2$

Etudier la la continuité de f en $x_0 = 1$

Exercice14 : Soit la fonction h définie par

$f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2- Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, f est-elle continue en $x_0 = -1$?

3- Soit la fonction f définie par :

$\begin{cases} f(x) = f(x); si...x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$

a) Déterminer D_f

b) Etudier la continuité de la fonction f en $x_0 = -1$ La fonction f s'appelle un prolongement par continuité de la fonction de f en -1

4- Peut-on prolonger f par continuité en $a = -2$

Exercice15 : Soit f une fonction définie par

$f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ Donner un prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$

Exercice 16 : Etudier la la continuité des $f$onctions suivantes :

1) $h(x) = \sqrt{x^2+x+3}$ 2) $g(x) = \dfrac{x^4+x^3-6}{x^2+2x-3}$

3) $t(x) = \tan x$

Exercice 17 : Etudier la la continuité des $f$onctions suivantes :

1) $f(x) = \cos(2x^2-3x+4)$

2) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+\sin^2 x}}$ 3) $h(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

Exercice 18 : Déterminer les limites suivantes :

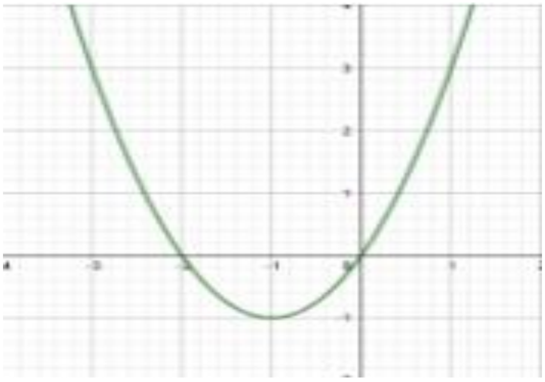
1) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\pi\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\pi\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$

Exercice19 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{\pi \tan x}{3x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-\cos x}}$

Exercice20 : Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x) = x^2+2x$



Déterminer graphiquement les images des intervalles : $[-1,2]$, $[0,2[$; $]-1,0]$

$[2,+\infty[$; $]-\infty,1]$

Exercice21 : Soit f une fonction définie par

$f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$

Déterminer les images des intervalles suivants : [0,1] ; [−2,-1[;] − 1, 1] ; [2, +∞[

Exercice22 : Montrer que l'équation :

$4x^3-3x-\dfrac{1}{2}=0$ admet une racine dans chacune des intervalles suivants : $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$; $\left]-\dfrac{1}{2};0\right[$ et $]0;1[$

Exercice23 : Montrer que l'équation :

$x^3+x+1=0$

Admet une racine unique dans $]-1;0[$

Exercice24 : Montrer que l'équation : $\cos x = x$

Admet au moins une racine dans intervalle :

$I = [0;\pi]$

Exercice25 : Montrer que l'équation : $1+\sin x = x$

Admet au moins une racine dans intervalle :

$I = \left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right]$

Exercice26 : on considère la fonction : f tel que

$f(x) = x^3+x-1$

1) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in]0;1[$

3) étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice27 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\frac{x-3}{x+2}$

1) Montrer que la fonction g la restriction de f sur intervalle $I=]-2;+\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

Exercice 28: Soit f la fonction définie sur $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\sqrt{2x-1}$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

3)Représenter (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repére orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

Exercice29 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^5=32$ **2)** $x^7=-128$ **3)** $x^4=3$ **4)** $x^6=-8$

Exercice30 : simplifier les expressions suivantes :1) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ 2) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$

3) $A=\sqrt[5]{32}-\left(\sqrt[7]{2}\right)^7+\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}+\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

4) $B=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{16}\times\sqrt{\sqrt[3]{4}}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

5) $C=\frac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$ 6) $D=\sqrt[6]{\frac{2^5\times128000000}{27^2}}$

7) $E=\frac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$ 8) $F=\frac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}\times\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$

Exercice31 : comparer : $\sqrt[5]{2}$ et $\sqrt[7]{3}$

Exercice 32 : résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt[5]{3x-4}=2$ 2) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$

Exercice 33 : calcules les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to2}\sqrt[5]{x^3+24}$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}$

3) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ 4) $\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

5) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+3}}{x-1}$ 6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$

7) $\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$

Exercice34 : simplifier les expressions suivantes :1) $A=\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}$

2) a)comparer : $\sqrt[5]{4}$ **et** $\sqrt[4]{3}$

b) comparer : $\sqrt[3]{28}$ et $\sqrt{13}$

c) comparer : $\sqrt[5]{23}$ et $\sqrt[15]{151}$

Exercice35 :1) Rendre le dénominateur rationnel

$a=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2}$ $b=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$ $c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}$

$d=\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$

2) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x$

Exercice36 : Déterminer la limite suivante :

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}$

Exercice37: 1)simplifier les expressions suivantes : $A=\frac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}$

et $B=\frac{\sqrt[4]{9}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

a) $\sqrt[3]{x-1}=3$ b) $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}-8=0$

c) $\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-12=0$

2)Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5+x^2+1}$ b) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

c) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$