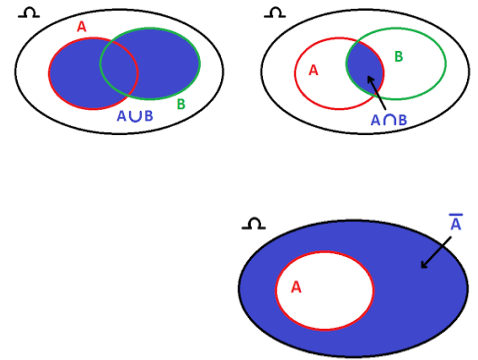


## I) CARDINAL D'UN ENSEMBLE FINI - PARTIES D'UN ENSEMBLE.

- Soit  $\Omega$  un ensemble fini de  $n$  éléments,  $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ .  
 L'entier naturel  $n$  est appelé **cardinal** de  $\Omega$ . On note :  $\text{card}\Omega = n$
- $A$  et  $B$  désignent deux parties de  $\Omega$ . On écrit :  $A \subset \Omega$  et  $B \subset \Omega$
- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles **disjoints** (c'est-à-dire  $A \cap B = \emptyset$ ) alors  $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B$
- $\bar{A} = \{x \in \Omega : x \notin A\}$ , est le **complémentaire** de  $A$ .
- $\bar{A} \cup A = \Omega$  et  $\bar{A} \cap A = \emptyset$
- $\text{card}\bar{A} = \text{card}\Omega - \text{card}A$



## II) PRINCIPE DE PRODUIT OU PRINCIPE FONDAMENTAL DE DÉNOMBREMENT.

- **arbre de choix**
- **Principe de produit** : Si une expérimentation aléatoire peut se décomposer en  $p$  opérations élémentaires successives tels que :
  - La **première** opération peut être effectuée de  $n_1$  manières différentes.
  - La **deuxième** opération peut être effectuée de  $n_2$  manières différentes.
  - La **troisième** opération peut être effectuée de  $n_3$  manières différentes. Et ainsi de suite ...
  - La  $p^{\text{ième}}$  opération peut être effectuée de  $n_p$  manières différentes.

Alors l'ensemble de toutes ces opérations peut être effectuées de  $N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p$  manières différentes

## III) ARRANGEMENTS ET PERMUTATION D'UN ENSEMBLE FINI.

- **Arrangements sans répétitions.**
- **Notion de factorielle** : Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n > 1$   
 On appelle " **$n$  factorielle**" le nombre entier noté  $n!$  tel que  $n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$   
 Par convention, on pose  $0! = 1$  et  $1! = 1$ .
- $\Omega$  étant un ensemble à  $n$  éléments, on appelle **arrangement** de  $p$  éléments de  $\Omega$ , toute suite de  $p$  éléments **distincts** de  $\Omega$ . On le note  $A_n^p$ .

Il y a  $n$  façons de choisir le 1<sup>er</sup> élément,  $(n-1)$  façons de choisir le 2<sup>ème</sup> élément, ...,  $[n-(p-1)]$  façons de choisir le  $p^{\text{ème}}$ , et d'après le principe

$$\text{Donc } A_n^p = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{si } p \leq n. \quad A_n^0 = 1; A_n^1 = n; A_n^n = n!.$$

- $\Omega$  étant un ensemble à  $n$  éléments, on appelle **permutation**, tout arrangement des  $n$  éléments de  $\Omega$ .  
 Il y a  $n!$  permutations de  $\Omega$  si les  $n$  éléments sont distinguables entre eux.
- **Arrangements avec répétitions.**

C'est le nombre d'arrangements que l'on peut faire avec  $p$  éléments choisis parmi  $n$  éléments, chacun d'eux peut figurer **plusieurs** fois dans le même arrangement. Le nombre d'arrangements avec **répétitions** est  $n^p$

**N. B.** : Quand il s'agit de classer  $k$  « objets », rangés en  $p$  groupes dont les éléments sont considérés comme indistinguables entre eux à l'intérieur de chaque groupe, il faut trouver le nombre de permutations distinctes de  $p$  objets quand  $k_1$  sont d'une sorte,  $k_2$  d'une autre, ...,  $k_p$  de la  $p^{\text{ème}}$  sorte, avec

$$k_1 + k_2 + \dots + k_p = k. \quad \text{Ce nombre est alors : } \frac{k!}{k_1! \times k_2! \times \dots \times k_p!}.$$

#### IV) COMBINAISONS D'UN ENSEMBLE FINI.

$\Omega$  étant un ensemble à  $n$  éléments, on appelle **combinaison** de  $p$  éléments de  $\Omega$ , toute partie de  $p$  éléments de  $\Omega$ . On la note  $C_n^p$  telle que :  $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$  /  $1 \leq p \leq n$ .

**Formules usuelles** :  $C_n^p = C_n^{n-p}$  ;  $C_n^0 = C_n^n = 1$  ;  $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$  ;  $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$  (formule de **Pascal**) ;  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$  (formule du **binôme**)

#### V) TYPES DE TIRAGES.

- La plupart des expériences aléatoires peuvent être interprétées comme des tirages de  $p$  boules d'une urne qui en contient  $n$ .
- Il y a **deux critères** pour distinguer ces tirages :
  - L'ordre** : Si l'ordre dans lequel on tire les boules est pris en considération, on dit que c'est un « tirage avec ordre », sinon c'est un « tirage sans ordre ».
  - La répétition** : Si on remet chaque boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante, on peut tirer plusieurs fois la même boule : on parle alors d'un tirage avec répétition ou avec remise. Dans le cas contraire on parle d'un tirage sans répétition ou sans remise.

$\Omega$  étant un ensemble à  $n$  éléments, On tire  $p$  éléments parmi  $n$  éléments, donc :

| Type de tirage               | Ordre         | Répétition | Nombre de tirages possibles |
|------------------------------|---------------|------------|-----------------------------|
| <i>Successif avec remise</i> | Important     | Possible   | $n^p$                       |
| <i>Successif sans remise</i> | Important     | Impossible | $A_n^p$ $p \leq n$          |
| <i>Simultané</i>             | Pas important | Impossible | $C_n^p$ $p \leq n$          |

### Exercices

#### Exercice1

Un sac contient **4 boules vertes**, **3 boules rouges** et **2 boules bleus**.

On tire **simultanément** et trois boules du sac.

- Déterminer le nombre de cas possible.
- Déterminer le nombre de cas possibles de chacun des événements suivants :
 

**A** : « Tirer trois boules vertes »

**B** : « les boules tirées sont de même couleur »

**D** : « Tirer deux boules rouges **et** une boule bleue »

**E** : « Tirage contenant une boule rouge exactement »

**F** : « Tirage ne contenant aucune boule rouge »

**G** : « Tirage contenant **au moins** une boule rouge »

**H** : « Tirage contenant au plus deux boules vertes »

**K** : « les boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux »

**M** : « les boules tirées sont de couleur différentes »

**N** : « Tirage contenant au moins deux couleurs »

**R** : « Tirage contenant au plus deux couleurs »

#### Exercice2

Un sac contient **2 boules verte**, **5 rouges** et **3 bleus**.  
On tire **successivement et sans remise**, trois boules.

- Déterminer le nombre de cas possible.
- Déterminer le nombre de cas possibles :
 

**A** : « Tirer trois boules vertes »

**B** : « les boules tirées sont de même couleur »

**D** : « Tirer deux boules rouges **et** une boule bleue »

**E** : « Tirage contenant une boule rouge exactement »

**F** : « Tirage ne contenant aucune boule rouge »

**G** : « Tirage contenant **au moins** une boule rouge »

**H** : « Tirage contenant au plus deux boules vertes »

**K** : « les boules sont de couleurs différentes deux à deux »

**M** : « les boules tirées sont de couleur différentes »

**N** : « Tirage contenant au moins deux couleurs »

**R** : « Tirage contenant au plus deux couleurs »

**S** : « Tirer une boule blanche, puis une boule rouge, puis une boule noire »

**T** : « Tirer une boule blanche et une boule rouge et une boule noire »

# Probabilité

## I) VOCABULAIRES.

- **aléatoire** = Lié au hasard ; imprévisible ; arbitraire.
- On dit qu'une **expérience** est **aléatoire** si on peut déterminer parfaitement, par avance toutes les issues possibles mais on ne peut pas prévoir par avance, laquelle de ces issues sera réalisée.
- L'**univers**  $\Omega$  est l'ensemble de tous les résultats possibles.  
Posons  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ . (C'est-à-dire  $\text{card}\Omega = n$ )
- On appelle **événement** toute partie  $A$  de  $\Omega$ .
- Un événement réduit à une seule issue  $\{\omega_i\}$  est un **événement élémentaire**.
- $\Omega$  est appelé l'événement **certain**.
- $\emptyset$  est appelée l'événement **impossible**.
- Si  $A$  et  $B$  désignent deux événements de  $\Omega$ , l'événement  $A \cup B$  est réalisé si l'un au moins des événements  $A$  et  $B$  est réalisé.
- L'événement  $A \cap B$  est réalisé si les événements  $A$  et  $B$  sont tous les deux réalisés.
- On dit que les événements  $A$  et  $B$  **incompatibles** si  $A \cap B = \emptyset$ ; Cela revient à dire que les deux événements ne peuvent pas se réaliser en même temps.
- L'événement contraire d'un événement  $A$ , est  $\bar{A}$  constitué des éléments de  $\Omega$  n'appartenant pas à  $A$ .

**Exemple** : Lancer un dé à 6 faces et noter le chiffre apparent sur la face supérieure, est une expérience aléatoire :

- Il y a **6** issues possibles.
- L'univers de cette expérience est  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .
- $A$  : « Le résultat est impair » est un événement qu'on peut exprimer en langage symbolique de la forme suivante  $A = \{1; 3; 5\}$ .  
Donc  $\bar{A} = \{2; 4; 6\}$
- $B$  : « Le résultat est un multiple de 5 », est on peut écrire  $B = \{5\}$ . Donc  $B$  est un événement élémentaire, mais « 5 » est une issue possible et  $B$  est un ensemble qui contient cette seule issue.



## II) PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT.

**Définition** : Pour certaines expériences aléatoires, sous certaines conditions, on peut déterminer en pourcentage ou par un quotient « **la chance** » qu'un événement a pour se réaliser. Ce **nombre** s'appelle la **probabilité** de l'événement.

- La probabilité d'un événement  $A$  d'un univers fini  $\Omega$  est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
- Par exemple : Si  $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$  et  $A = \{\omega_2; \omega_5; \omega_8\}$  alors :  $p(A) = p(\{\omega_2\}) + p(\{\omega_5\}) + p(\{\omega_8\})$
- $p(\Omega) = 1$  ;  $p(\emptyset) = 0$  et Pour tout événement  $A$  on a :  $0 \leq p(A) \leq 1$

### Propriétés

- Pour tous événements  $A$  et  $B$  on a :  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ .
- Pour tous événements **disjoints** ou **incompatibles**  $A$  et  $B$  on a :  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- Pour tous événements deux à deux **disjoints** ou **incompatibles**  $A_1, A_2, \dots, A_n$  on a :  
$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n).$$
- Pour tout événement  $A$ ,  $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ .

### III) EUIPROBABILITÉ.

**Définition** : Dans une expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisée, on dit qu'on est dans une situation d'équiprobabilité. Donc : si  $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$

$$\text{Alors } p(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\text{card}\Omega} \quad ; \quad \text{c'est-à-dire pour tous événement } A \text{ on a : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}.$$

**Remarque** : Dans le cas de l'équiprobabilité la détermination d'une probabilité se ramène en générale à des problèmes de **dénombrement**.

**Exemple** : On lance un dé **équilibré** (non truqué) dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse à la probabilité de l'événement :  $A$  « le numéro de la face supérieure est multiple de 2 »

$$\text{on a : } A = \{2; 4; 6\} \text{ donc } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

### IV) PROBABILITÉ CONDITIONNELLE.

**Définition** : Soit  $B$  un événement de l'ensemble  $\Omega$ , tel que  $P(B) \neq 0$ .

On définit sur  $\Omega$  une nouvelle probabilité, notée  $P_B$ , en posant, pour tout événement  $A$ ,  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

On note  $P_B(A) = P(A/B)$  qui se lit « probabilité de  $A$  que  $B$  est réalisé ».

**Propriété** : Soient  $A$  et  $B$  deux événements de l'ensemble  $\Omega$ , tel que  $P(B) \neq 0$ .

$$\text{Alors : } P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A).$$

**Définition** : On dit que deux événements  $A$  et  $B$  sont **indépendants** lorsque  $P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$ .

**Remarque** : Ne pas confondre **indépendant** et **incompatible**

### V) PROBABILITÉS TOTALES.

1) **Arbre de probabilité** : C'est un arbre sur lequel on place des probabilités conditionnelles d'événements, cette présentation permet de rendre plus simple le calcul de probabilité :

**Remarque** : Arbre probabiliste  $\neq$  Arbre à dénombrer

#### Exemple

Soit  $p$  une probabilité sur un univers  $\Omega$  et  $A, B$  et  $C$  trois événements incompatibles et leur réunion est  $\Omega$

Soit un événement  $M$ , donc nous obtenons l'arbre probabiliste ci-contre :

**Remarque** : Un **arbre de probabilités** comporte des **nœuds** et des **branches**.

On applique les règles suivantes :

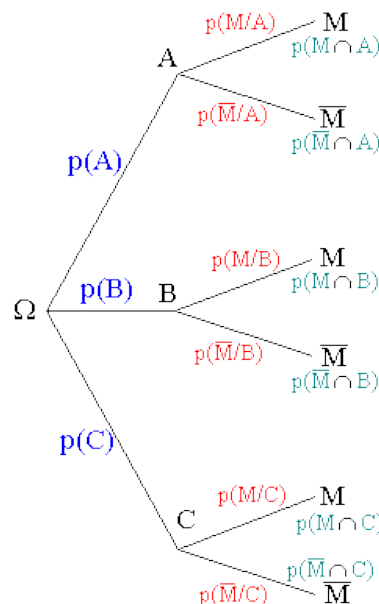
- la somme des probabilités marquées sur des branches issues d'un même nœud est égale à 1,
- la probabilité d'un événement qui correspond à un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des branches aboutissant à cet événement.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } p(M) &= p(M \cap A) + p(M \cap B) + p(M \cap C) \\ &= p_A(M) \times p(A) + p_B(M) \times p(B) + p_C(M) \times p(C) \end{aligned}$$

#### 2) Formule des probabilités totales.

**Théorème** : Soit  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , des événements de probabilité non nulle, réalisant une partition de l'univers  $\Omega$ . Alors, pour tout événement  $B$  de ce même univers, on a :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_k) \\ &= p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \dots + p_{A_k}(B) \times p(A_k) \end{aligned}$$



**Exercice** : On considère trois urnes respectivement notées  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$ . L'urne  $U_1$  contient **une** boule rouge et **cinq** boules jaunes, l'urne  $U_2$  contient **trois** boules rouges et **une** boule jaune, l'urne  $U_3$  contient **une** boule rouge et **deux** boules jaunes.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

## VI) VARIABLES ALÉATOIRES.

**Introduction** : Une variable aléatoire est une variable dont la valeur est déterminée en fonction du résultat d'une expérience aléatoire.

**Activité** : On lance **trois fois** de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne **2** points pour chaque résultat « **Pile** » et on perd **1** point pour chaque résultat « **Face** ».

L'ensemble des issues est  $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$  et il est de bon sens de choisir l'équiprobabilité sur  $\Omega$ .

L'application  $X : \Omega \rightarrow [0,1]$ , qui, à chaque issue, associe le **gain** du joueur, prend les valeurs **- 3, 0, 3** et **6**. Pour chaque valeur, on peut considérer l'événement  $(X = 3) = \{PPF, PFP, FPP\}$  et lui associer sa probabilité  $\frac{3}{8}$

On obtient ainsi une nouvelle **loi de probabilité** sur l'ensemble des gains :  $X(\Omega) = \{- 3, 0, 3, 6\}$ .

On la nomme **loi de X**.

|              |             |           |           |           |
|--------------|-------------|-----------|-----------|-----------|
| gain $x_i$   | $x_1 = - 3$ | $x_2 = 0$ | $x_3 = 3$ | $x_4 = 6$ |
| $p(X = x_i)$ | 1/8         | 3/8       | 3/8       | 1/8       |

**Définition** : soit  $X$  une variable aléatoire discrète, l'application  $p$  est dite loi de probabilité de  $X$ , définie par:

$$P : X(\Omega) \rightarrow [0,1]$$

$$x_i \mapsto p(X = x_i)$$

**Remarque** : Si  $X$  est une variable aléatoire discrète et  $p$  sa loi de probabilité et  $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$

$$\text{Alors : } \sum_{i=1}^n p(X = x_i) = 1$$

**Esperance mathématique** :

On appelle espérance mathématique de  $X$  le nombre, noté  $E(X)$ , définit par :  $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(X = x_i)$

**Variance et écart type** :

- On appelle variance de  $X$  le nombre positif noté  $V(X)$  suivant :  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- On appelle écart type de  $X$  le nombre positif noté  $\sigma(X)$  suivant :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

## VII) LOI BINOMIALE.

**Définition** : On réalise  $n$  fois successivement et d'une manière indépendante une expérience aléatoire qui a deux résultats possibles : **succès** de probabilité  $p$  et **échec** de probabilité  $(1-p)$ . Donc  $(\forall k \in X(\Omega)); P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$X$  : nombre de succès obtenu est une variable aléatoire **binomiale** de paramètre  $n$  et  $p$ .

**Quelques interprétations**

- $E(X)$  est la **moyenne** des valeurs  $x_i$ , pondérées par les valeurs  $p_i$ .
- Dans le domaine des jeux (le terme « **espérance** » vient de là),  $E(X)$  est le **gain moyen** que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties. Cela permet de qualifier un jeu d'équitable (ou honnête) lorsque  $E(X) = 0$  ; lorsque  $E(X) > 0$ , le jeu est favorable au joueur, il lui est défavorable si  $E(X) < 0$ .
- La variance et l'écart-type sont des paramètres de **dispersion**.

**Propriété** :

Si  $X$  est une variable aléatoire binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ . Alors :

$$X(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$