

1 Expression analytique du produit scalaire dans le plan :

1.1 Rappel (Formule trigonométrique du produit scalaire) :

a) Activité :

Soit ABC un triangle dans le plan rectangle en A , avec : $AB = 2$; $AC = 2$ et $BC = \sqrt{8}$.
et $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Calculer les produit scalaire suivants : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

b) Propriété et définition :

Propriété et Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans le plan.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ définie par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\overrightarrow{\vec{u}}; \overrightarrow{\vec{v}}).$$

Remarque :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

1.2 Repère orthonormé direct :

Définition 1

Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base du plan, et O un point du plan.

- ▷ On dit que $(\vec{i}; \vec{j})$ est une base orthonormée si : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$; $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.
- ▷ On dit que $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère orthonormé si $(\vec{i}; \vec{j})$ est une base orthonormée.
- ▷ Si $(\vec{i}; \vec{j})$ est une base orthonormée et $(\overrightarrow{\vec{i}}; \overrightarrow{\vec{j}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est appelé repère orthonormé direct.

Dans toute la suite du chapitre, On considère que le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1.3 Expression analytique du produit scalaire :

a) Activité :

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$,

1. Montrer que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

2. En déduire que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriété

Soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs du plan, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Exemple

Soit $\vec{u}(2; -3)$; $\vec{v}(-1; 4)$ et $\vec{w}(3; 2)$.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$; $\vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w}$.

1.4 Norme d'un vecteur - distance entre deux points :

a) Norme d'un vecteur:

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ un vecteur du plan. La norme du vecteur $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Distance entre deux points :

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. La distance AB est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exercice :

Considérons les points $A(3; 1)$; $B(-1; -1)$ et $C(5; -3)$.

1. Calculer les distances AB ; AC et BC . En déduire la nature du triangle ABC . (isocèle et rectangle en).
2. Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

1.5 Expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$

Propriété

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs non nuls du plan et une mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Démonstration :

Exercice :

Considérons les points $A(1; 1)$; $B(-1; 2)$ et $C(4; 5)$.

- 1) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et $\det(\vec{AB}; \vec{AC})$.
- 2) et soit θ une mesure de l'angle $(\vec{AB}; \vec{AC})$. Calculer : $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Remarque :

Soit ABC un triangle. L'aire du triangle ABC , est $S = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}; \vec{AC})|$.

2 Droite dans le plan (Étude analytique)

2.1 Vecteur normal à une droite :

Définition

Soit (D) une droite du plan.

Tout vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite (D) est appelé **vecteur normal** à la droite (D) .

Soit (D) une droite d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$. le vecteur $\vec{n}(a; b)$ est normal à (D) .

Exemple :

Considérons la droite (D) telle que : $(D) : 2x + 3y - 4 = 0$, on a : $\vec{u}(-3; 2)$ est un vecteur directeur de la droite (D) . et $\vec{n}(2; 3)$ est un vecteur normal à (D) .

Exercice :

Donner un vecteur normal à la droite (D) dans chacune des cas suivants :

- 1). $(D) : x - 2y + 5 = 0$ $(D) : 2y - 3 = 0$ $(D) : x - 1 = 0$.

2.2 Équation d'une droite définie par un point et un vecteur normal

Propriété

Une équation de la droite (D) passant par le point $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ est :
 $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.

En effet soit $M(x; y)$ un point du plan, on a :

$$\begin{aligned}M(x; y) \in (D) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \\&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\&\Leftrightarrow (x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b = 0 \\&\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0\end{aligned}$$

$$\text{c.à.d } (D) : a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

Exemple :

Déterminons une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(1; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2; 1)$.

$$\text{On a : } (D) : 2(x - 1) + 1(y - 3) = 0 \text{ c.à.d } (D) : 2x + y - 5 = 0$$

Exercice :

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(2; 2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3; 2)$.

Propriété (Orthogonalité de deux droites) :

Soient (D) et (D') deux droites d'équations respectives : $(D) : ax + by + c = 0$ et $(D') : a'x + b'y + c' = 0$.
 (D) et (D') sont orthogonales si et seulement si : leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, c'est-à-dire :
 $aa' + bb' = 0$.

2.3 Distance d'un point à une droite :

Définition

Soit (D) une droite, A un point du plan et H le projeté orthogonal de A sur (D) .

Le nombre réel positif AH est appelé la distance du point A à la droite (D) et on écrit : $d(A; (D)) = AH$.

Propriété

Soit (D) une droite d'équation : $ax + by + c = 0$ et $A(x_A; y_A)$ un point du plan.

La distance du point A à la droite (D) est :

$$d(A; (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemple :

On considère la droite $(D) : 4x - 3y - 1 = 0$ et les points $A(1; 2)$ et $B(-1; 1)$.

$$\text{On a : } d(A; (D)) = \frac{|4 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 - 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dots\dots \text{ et } d(B; (D)) = \frac{|4 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 - 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dots\dots$$

Remarque :

$$d(A; (D)) = 0 \Leftrightarrow A \in (D).$$

3 Équation cartésienne d'un cercle

3.1 Équation d'un cercle définie par son centre et son rayon

a) Activité :

I) Considérons le cercle de centre $\Omega(-1;3)$ et de rayon $r = 5$, et soit $M(x;y) \in (\mathcal{P})$.

1. Montrer que : $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow \Omega M^2 = 25$ (1)

2. Écrire en fonction de x et y l'égalité (1).

3. Parmi les points suivants, déterminer ceux qui appartiennent au cercle (C) :

$N(2;1)$ et $L(2;-1)$. ???

II) En suivant les mêmes démarches de la question précédente, déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r ($r > 0$).

b) Propriété :

Propriété

Une équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r ($r > 0$) est :

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, que l'on peut écrire : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ où $c = a^2 + b^2 - r^2$.

Exemple :

Une équation du cercle de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$, est : $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{2}^2$.

Exercice :

Déterminer une équation du cercle (C) dans chacune des cas suivants :

a) (C) de centre $\Omega(1;0)$ et de rayon $r = 3$.

b) (C) de centre $\Omega(2;1)$ et passe par le point $A(-1;1)$.

3.2 Équation d'un cercle définie par son diamètre :

a) Propriété :

Propriété

Soient A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan qui vérifient : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est un cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice :

Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) de diamètre $[AB]$ avec : $A(1;3)$ et $B(1;-1)$.

5.3.3 Représentation paramétrique d'un cercle :

Propriété et Définition

Le cercle (C) de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r ($r > 0$) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant

$$\text{la système : } (S) \begin{cases} x = a + r \cos(\theta) \\ y = b + r \sin(\theta) \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}.$$

Le système (S) est appelé une représentation paramétrique du cercle (C) .

Exercice :

Déterminer une représentation paramétrique du cercle (C) de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $r = 3$.

5.3.4 Études de l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Propriété

Soient a ; b et c trois nombres réels et (E) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. $(E) = \{M(x;y) / x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$.

▷ Si $a^2 + b^2 - 4c > 0$ alors (E) est un cercle de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ et de rayon

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}.$$

▷ Si $a^2 + b^2 - 4c < 0$ alors (E) est l'ensemble vide.

▷ Si $a^2 + b^2 - 4c = 0$ alors $(E) = \{\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)\}$.

Résumé : Analytique du produit scalaire dans le plan

Dans tous ce qui suit on considère le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

✚ Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan, alors :

1 $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ (Cette formule est appelée la formule analytique du produit scalaire) ;

2 $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

✚ Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan, alors :

3 $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

✚ Si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs non nuls du plan, alors :

4 $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$ et 5 $\sin(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$

✚ L'aire du triangle ABC est : 6 $S = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}; \vec{AC})|$

- $\vec{AB}(\underbrace{x_B - x_A}_{x_{\vec{AB}}}, \underbrace{y_B - y_A}_{y_{\vec{AB}}})$
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = x_{\vec{AB}} \times x_{\vec{AC}} + y_{\vec{AB}} \times y_{\vec{AC}}$
- $AB = \sqrt{(x_{\vec{AB}})^2 + (y_{\vec{AB}})^2}$
- $\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = \begin{vmatrix} x_{\vec{AB}} & x_{\vec{AC}} \\ y_{\vec{AB}} & y_{\vec{AC}} \end{vmatrix}$
- $\cos(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC}$
- $\sin(\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{\det(\vec{AB}; \vec{AC})}{AB \times AC}$
- $S = \frac{1}{2} |\det(\vec{BC}; \vec{BA})|$
- $S = \frac{1}{2} |\det(\vec{CA}; \vec{CB})|$

✚ Soit (D) une droite du plan :

→ Tout vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite (D) est appelé vecteur normal à la droite (D) .

→ 7 Si une équation cartésienne de la droite (D) est $ax + by + c = 0$ alors le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est normal à la droite (D) .

→ L'équation cartésienne de la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ est

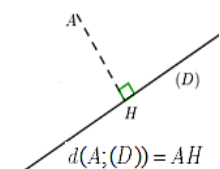
8 $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

✚ Si les droites (D) et (D') sont définies respectivement par les équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et

$a'x + b'y + c' = 0$ alors 9 $(D) \perp (D') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$

✚ Soit (D) la droite du plan d'équation $ax + by + c = 0$ et $A(x_A; y_A)$ un point du plan :

La distance du point A à la droite (D) est 10 $d(A; (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



✚ Soit M un point du plan et R un réel positif.

→ Le cercle (C) de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que : $\Omega M = R$
On le note par $C(\Omega; R)$.

→ L'équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R est [11] $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

→ Que l'on peut écrire [12] $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ où $c = a^2 + b^2 - R^2$

✚ Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts dans le plan :

→ Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

→ L'équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ est [13] $(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0$

✚ [14] Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan vérifiant : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ où $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$

→ Si $a^2 + b^2 - 4c > 0$ alors l'ensemble (Γ) est le cercle de centre $\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$

→ Si $a^2 + b^2 - 4c = 0$ alors l'ensemble (Γ) est le singleton $\Omega(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$

→ Si $a^2 + b^2 - 4c < 0$ alors l'ensemble (Γ) est l'ensemble vide.

✚ [15] Soit (C) le cercle de centre Ω et de rayon R ($R > 0$) et M un point du plan :

→ Le point M est sur le cercle $(C) \Leftrightarrow \Omega M = R$

→ Le point M est à l'intérieur du cercle $(C) \Leftrightarrow \Omega M < R$

→ Le point M est à l'extérieur du cercle $(C) \Leftrightarrow \Omega M > R$

✚ [16] Si $(C): x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne du cercle (C) alors :

→ Le point $M(x_M; y_M)$ est sur le cercle $(C) \Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 + ax_M + by_M + c = 0$

→ Le point $M(x_M; y_M)$ est à l'intérieur du cercle $(C) \Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 + ax_M + by_M + c < 0$

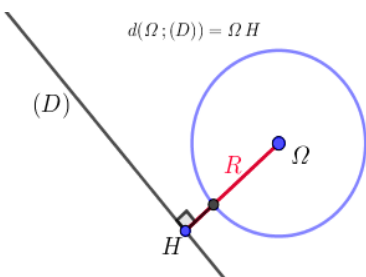
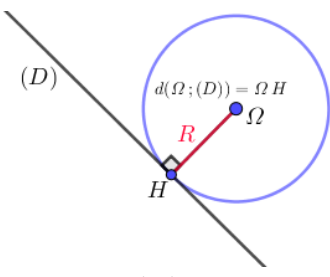
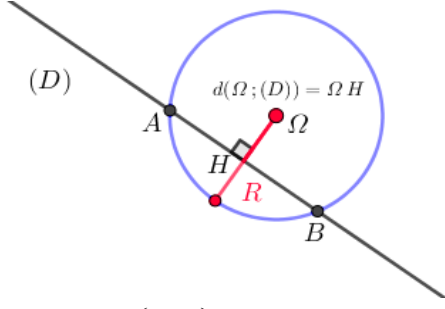
→ Le point $M(x_M; y_M)$ est à l'extérieur du cercle $(C) \Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 + ax_M + by_M + c > 0$

Ainsi, le cercle (C) détermine trois parties disjointes dans le plan.

✚ Le cercle (C) de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan qui vérifient le

système [17] $\begin{cases} x = a + R \cos(\theta) \\ y = b + R \sin(\theta) \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$, ce système est appelé une représentation paramétrique du cercle (C)

✚ [18] Soit (C) le cercle de centre Ω et de rayon R et (D) une droite dans le plan et soit $d = d(\Omega; (D))$ la distance du point Ω à la droite (D)

Si $d > R$ alors (D) ne coupe pas (C)  $d(\Omega; (D)) = \Omega H$ $(D) \cap (C) = \emptyset$	Si $d = R$ alors (D) coupe (C) en un unique point.  $d(\Omega; (D)) = \Omega H$ $(D) \cap (C) = \{H\}$	Si $d < R$ alors (D) coupe (C) en deux points.  $d(\Omega; (D)) = \Omega H$ $(D) \cap (C) = \{A; B\}$
---	---	--

✚ Soit (C) un cercle de centre Ω et A un point de (C) .

→ La tangente à (C) au point A est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

→ L'équivalence [19] $M(x; y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ permet de déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) au cercle (C) au point A .