Cours
Les polynômes

I) Définition d'un polynôme

Activité : Soit un parallélépipède rectangle dont les dimensions : x ,**x + 3** et **x + 5** avec **x** réel strictement positif. Soit *V(x)* le volume de ce parallélépipède

1)Montrer que $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$

2)Calculer V(1) *et* V(2)*?*

3)Quelles opérations as-tu utilisé pour calculer V(1) *et* V(2) ?

1)Vocabulaire

L'expression : $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$ est appelée polynôme de degré 3

On note deg (V) = 3.

Les réels 1, 8, 15,0 sont appelés coefficients du polynôme V(x).

$8x^2$ est un monôme de degré 2 et de coefficient 8.

x^3 est un monôme, de degré 3 et de coefficient 1.

15x est un monôme, de degré 1 et de coefficient 15.

2)Définition : Un polynôme est une somme de monômes.

Un polynôme de la variable x sera noté souvent $P(x)$,$Q(x)$, ... Le degré du polynôme P, noté degP, est celui de son monôme de plus haut degré.

3)Remarque et exemples :

1) $P(x)=3x^4+x^3-7x+\sqrt{3}$ est un polynôme de degré 4 donc deg (P) = 4.

Il est ordonné suivant les puissances décroissantes. Son terme constant (le terme sans la variable x) est $\sqrt{3}$

2) $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)$

$Q(x)=2x^3-4x^2+2x^2+3x-2x-3$

$R(x)=2x^3-2x^2+x-3$ Donc deg (Q) = 3.

3) $R(x)=x^3+3x^2-\frac{2}{x}-1$ n'est pas un polynôme

4) $E(x)=\sqrt{x}+x^2-3$ n'est pas un polynôme

5) $F(x)=2=2x^0$ est un polynôme de degré 0 et S'appelle un polynôme constant

6) $M(x)=2x+6$ est un polynôme de degré 1 et s'appelle un monôme

Donc un monôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $M(x)=ax+b$

7) un polynôme de degré 2 s'appelle un trinôme

Donc un trinôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $T(x)=ax^2+bx+c$

Avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$

Application : Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que :
$P(0)=P(1)=5$ et $P(-2)=3$

4)Egalité de deux polynômes

Définition. Deux polynômes P et Q sont égaux et on écrit P = Q ssi . $P(x)=Q(x)$ pour tout x réel

Propriété. Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

Exemple : Lesquels des polynômes ci-dessous sont égaux ? Expliquez

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ et

$Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)$ et

$R(x)=2x^3+3x^2-2x-3$

Application: soit : $P(x)=x^4-2x^3+x^2-1$ et

$Q(x)=ax^5+(b+c)x^4+(c+d)x^3+dx^2+e$

Déterminer a ; b ; c et d pour que : $P=Q$

II) Les polynômes et les opérations

1)Activité : soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

I)Calculer dans chacun des cas suivants :

$P(x)+Q(x)$; $P(x)-Q(x)$; $3P(x)-2Q(x)$

1) $P(x)=x^3+2x^2-1$; $Q(x)=3x^4-x^3+x$

2) $P(x)=x^5-x^2+3$; $Q(x)=-x^5+x^2-5$

II) Calculer $P(x)\times Q(x)$ **et** $(P(x))^2$

dans chacun des cas suivants et comparer :

deg (PQ) et deg (P) +deg (Q)

1) $P(x)=x^2-1$; $Q(x)=x^2+2x-3$

2) $P(x)=x^4-x^2+2$; $Q(x)=3x+2$

2)Résumé :

a) La somme de deux polynômes :

Soient P et Q deux polynômes

La somme de P et Q est un polynôme noté $P+Q$

tel que : $(P+Q)(x)=(P)(x)+(Q)(x)$

pour tous $x\in\mathbb{R}$

Remarque : $\deg(P+Q)\leq\max(\deg(P);\deg(Q))$

b) Le produit d'un polynôme par un réel :

Soient P un polynôme et $\alpha\in\mathbb{R}^*$

Le produit de P par un réel α est un polynôme noté αP et tel que : $(\alpha P)(x)=\alpha\times(P)(x)$ pour tout $x\in$

Remarque : $\deg(\alpha P)=\deg(P)$

c) Le produit de deux polynômes :

Soient P et Q deux polynômes non nuls

Le produit de P et Q est un polynôme noté PQ

et tel que : $(PQ)(x)=(P)(x)\times(Q)(x)$ $x\in\mathbb{R}$

Remarque : $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$

III) La division par $x - a$ et factorisation de polynômes

1) La division euclidienne d'un polynôme par $x - a$

Propriétés : Soient P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in \mathbb{R}$

Il existe un unique polynôme Q de degré $n-1$ et tq :

$P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$ Pour tous $x \in \mathbb{N}$

Cette égalité est la division euclidienne de $P(x)$ par $x-a$

$Q(x)$ est le quotient et $P(a)$ le reste

Exemple : Soit : $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ et $a = -3$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 3x^2 - 2x - 6 & x+3 \\
\cline{2-2}
-x^3 - 3x^2 & x^2 - 2 \\
\cline{1-1}
-2x - 6 & \\
2x + 6 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

On a donc :

$P(x) = (x+3)Q(x) + P(-3) = (x+3)(x^2-2) + 0 = (x+3)(x^2-2)$

$Q(x) = x^2 - 2$ est le quotient et $P(-3) = 0$ le reste

Remarques : en remplaçons x par **-3** dans le polynôme : $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$

$P(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 2(-3) - 6 = -27 + 27 + 6 - 6 = 0$

On dit que **-3** est racine du polynôme $P(x)$

3)Le reste de la division de $P(x)$ par $x+3$ est 0. on dit que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x+3$.

2)Racine d'un polynôme :

Définition : Soient P un polynôme et soit $a \in \mathbb{R}$

On dit que a est racine du polynôme P ssi $P(a) = 0$

Exemple : Soit : $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

1) $P(1) = 1^3 - 2\times 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$ donc 1 est racine du polynôme P

2) $P(2) = 2^3 - 2\times 2^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1 \neq 0$ donc 1 n'est pas une racine du polynôme P

Propriété : Soient P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. a est racine du polynôme P ssi $P(x)$ est divisible par $x - a$.

Exemple : Soit : $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

On a $P(1) = 1^3 - 3\times 1^2 - 6\times 1 + 8 = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$

donc 1 est racine du polynôme P

Donc $P(x)$ est divisible par $x - 1$

Professeur : Rachid BELEMOU **Lycée** : Prince Moulay Abdellah	**Exercices** Les polynômes	**Niveau :** TCT-TCS : BIOF **Année** : 2021-2022

Exercice1 : Déterminer parmi les expressions suivantes ceux qui sont des polynômes et déterminer si c'est possible leurs degrés : $a \in$ IR

$P(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-\sqrt{3}$; $Q(x)=2x^2-x-\sqrt{x}$

$R(x)=5|x^2|+4|x|-5$; $M(x)=\frac{5}{3}x^2+x+2-7x^4$

$N(x)=x^2+\frac{1}{x}+3$; $O(x)=4$; $E(x)=(a-1)x^4+x^2+x+1$

Exercice2 : Exercice1 : Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que : $P(0)=P(1)=5$ et $P(-2)=3$

Exercice3 : Lesquels des polynômes ci-dessous sont égaux ? Expliquez

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ et $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)$ et

$R(x)=2x^3+3x^2-2x-3$

Exercice4 : soit : $P(x)=x^4-2x^3+x^2-1$ et

$Q(x)=ax^5+(b+c)x^4+(c+d)x^3+dx^2+e$

Déterminer a ; b ; c et d pour que : $P=Q$

Exercice5 : soit les polynômes suivants :

$P(x)=12x^4-36x^3+47x^2-30x+7$

$Q(x)=(2x^2-3x+1)(ax^2+bx+c)$

Déterminer a ; b ; c pour que : $P=Q$

Exercice6 : étudier l'égalité des polynômes dans les cas suivants :

1) $P(x)=x^3+2x^2(x-1)+x$ et $Q(x)=x^2(3x-2)+x$

2) $P(x)=(x-1)^3$ et $Q(x)=x^3-3x^2-3x+1$

Exercice7 : 1): soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

I)Calculer dans chacun des cas suivants :

$P(x)+Q(x)$; $P(x)-Q(x)$; $3P(x)-2Q(x)$

1) $P(x)=x^3+2x^2-1$; $Q(x)=3x^4-x^3+x$

2) $P(x)=x^5-x^2+3$; $Q(x)=-x^5+x^2-5$

II)Calculer $P(x)\times Q(x)$ et $(P(x))^2$

Dans chacun des cas suivants et comparer :

deg (PQ) et deg (P) +deg (Q)

1) $P(x)=x^2-1$; $Q(x)=x^2+2x-3$

2) $P(x)=x^4-x^2+2$; $Q(x)=3x+2$

$\deg(P^2)=2\deg(P)$

Exercice8 : soit le polynôme : $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

Est-ce que les nombres suivants sont des racines du polynôme $P(x)$ (justifier) ? 1 ;2 ;3 ; -2

Exercice9 : soit le polynôme : $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1)verifier que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2)factoriser $P(x)$

Exercice10 : soit le polynôme : $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

1) calculer $P(-3)$ et que peut-on dire ?

2)déterminer le le polynôme $Q(x)$ tel que :

$P(x)=(x+3)Q(x)$

Exercice11 : Soit : $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

1)Montrer que $P(x)$ est divisible par $x-3$

2)factoriser $P(x)$

Exercice12 : soit le polynôme :

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

1) Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x+2$ et déterminer le quotient $Q(x)$ et le reste

2)montrer que $Q(x)$ est divisible par $x-3$

3) en déduire une factorisation du polynôme P on polynômes de 1ere degrés

Exercice13 : Soit : $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$

1)montrer que1 est racine du polynôme P

2)montrer que $P(x)=(x-1)Q(x)$

Ou $Q(x)$ est un polynôme a déterminer

3) montrer que -2 est racine du polynôme Q

4) en déduire une factorisation du polynôme P on polynômes de 1ere degrés

5) résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

Exercice14 : Soit : $P(x)=2x^3+3x^2+ax+b$

Avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

1)déterminer a et b tels que

a) $P(x)$ soit divisible par $x-2$

b)le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ est -12

2) factoriser $P(x)$ dans ce cas

Exercice15 : Soit : $P(x)=x^3-3x+2$

1)a)calculer $P(1)$ et déterminer $Q(x)$ tel que :

$P(x)=(x-1)Q(x)$

b)verifier que $P(x)=(x+2)(x-1)^2$

2)soit α un réel tel que : $1<\alpha<2$

Donner un encadrement de $\alpha+2$ et de : $(\alpha-1)^2$

Et en déduire que : $0<P(\alpha)<4$

Exercice16 : Soit : $P(x)=2x^4-9x^3+14x^2-9x+2$

1) verifier que 0 n'est pas racine du polynôme $P(x)$

2)montrer que si α est racine du polynôme $P(x)$ alors $\frac{1}{\alpha}$

Est aussi racine du polynôme $P(x)$

3) verifier que 2 est racine du polynôme $P(x)$

4) en Effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$

Trouver un polynôme $Q(x)$ tel que :

$P(x)=(x-2)Q(x)$

5) en déduire que $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$

6) déterminer les réels a ; b ; c tel que :

$Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(ax^2+bx+c)$

7) en déduire une factorisation du polynôme P on polynômes de 1ere degrés