

I) L'ensemble $\mathbb{N}$

1) Définition : Tous les nombres entiers naturels composent un ensemble. On note : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$

$\mathbb{N}$: C'est l'ensemble des entiers naturels

0, 1, 2 et 5676 sont des entiers naturels

Par contre -45 n'en est pas un.

Remarque : 1) On dit que ces entiers sont naturels car ce sont ceux que l'on utilise naturellement dans la vie de tous les jours.

2) Il existe une infinité d'entiers naturels

2) Vocabulaire et symbole :

a) Le nombre 0 est le nombre entier naturel nul.

b) Les nombres entiers naturels non nuls composent un ensemble, nous le notons par le symbole :

$$\mathbb{N}^* = \{1; 2; \dots\} = \mathbb{N} - \{0\}$$

c) 7 est un nombre entier naturel, on écrit : $7 \in \mathbb{N}$

on lit : 7 appartient à $\mathbb{N}$

d) (-3) n'est pas un nombre entier naturel, on écrit $-3 \notin \mathbb{N}$

on lit : -3 n'appartient pas à $\mathbb{N}$

Exercice : compléter par : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$

$$-4 \dots \mathbb{N} ; \frac{2}{3} \dots \mathbb{N} ; \sqrt{2} \dots \mathbb{N} ; \frac{8}{2} \dots \mathbb{N} ; -\frac{15}{3} \dots \mathbb{N} ; 12 - 32 \dots \mathbb{N} ;$$

$$\sqrt{25} \dots \mathbb{N} ; 2, 12 \dots \mathbb{N} ; 0 \dots \mathbb{N}^* ; -\frac{\sqrt{100}}{3} \dots \mathbb{N}$$

$$2.12 \dots \mathbb{N} ; \pi \dots \mathbb{N} ; \{1; 2; 7\} \dots \mathbb{N} ; \{4; -2; 12\} \dots \mathbb{N} ; \mathbb{N}^* \dots \mathbb{N}$$

II) Diviseurs et multiples d'un nombre entier naturel

1) Définition : Soit $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$:

On dit que a est un **multiple** de b ou que b est un **diviseur** de a s'il existe un entier naturel k tel que $a = k \times b$

On dit aussi que b est un **diviseur** de a .

Remarque : tout nombre entier naturel non nul a admet au moins deux diviseurs, 1 et a .

Le nombre 0 est un multiple de tous les nombres entiers naturels.

- Le nombre 1 est un diviseur de tous les nombres entiers naturels.

Exemple : On a : $145 = 5 \times 29$ alors : 5 et 29 sont des diviseurs de 145

$$12 = 4 \times 3 = 1 \times 12 = 6 \times 2$$

4, 3, 1, 12, 6 et 2 sont des diviseurs de 12

par contre 5 n'est pas un diviseur de 12 car

$$12 \div 5 \notin \mathbb{N}$$

Exercice : déterminer les multiples de 9 comprises entre : 23 et 59

2) Critères de divisibilité

soit n un nombre entier naturel, n est divisible par :

a) 2 si et seulement si son nombre d'unités est :

0, 2, 4, 6 ou 8.

b) 3 si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 3.

c) 4 si et seulement si le nombre formé par ces deux derniers chiffres est divisible par 4.

d) 5 si et seulement si son nombre d'unités est : 0 ou 5.

e) 9 si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 9.

Exemples :-Le nombre 4725 est divisible par 5 car se termine par 5.

- Le nombre 4725 est divisible par 3 et 9 car le nombre $18 = (4+7+2+5)$ est un multiple de 3 et de 9.

- Le nombre 1628 est divisible par 2 car son chiffre d'unités est 2.

- Le nombre 1628 est un multiple de 4 car le nombre 28 formé par ces deux derniers chiffres est un multiple de 4.

Exercice1 : déterminer le chiffre x pour que le nombre : $532x$ Soit divisible par 9

Exercice2 : on pose $x = 3 \times 5 \times 7 \times 12$ et $y = 2 \times 5 \times 3 \times 5$

Sans calculer x et y montrer que :

1) 75 divise y

2) 105 divise x

3- Les nombres paires et impaires :

Activité :

Ecris ces nombres sous la forme $2x \dots$ ou $(2x \dots) + 1$
les nombres suivants : 68 ; 69 ; 86 ; 87 ; 92 ; 93

Règle 1 : Les nombres pairs sont terminés par 0, 2, 4, 6, 8
Les nombres impairs sont terminés par 1, 3, 5, 7, 9

Règle 2 : un nombre pair peut s'écrire $2x \dots$
un nombre impair peut s'écrire $2x \dots + 1$

Définition1 : on dit qu'un nombre pair s'il est un multiple de 2 ou s'il existe un
Entier naturel k tel que $n = 2.k$

Exemple : $6 = 2 \times 3$ $k=3$ donc 6 est nombre pair

Définition2 : on dit qu'un nombre impair s'il existe un
entier naturel k tel que $n = 2.k+1$

Exemple : $11 = 2 \times 5 + 1$ $k=5$ donc 11 est nombre impair

Remarques : Un nombre entier naturel est soit paire soit impaire, et on a les résultats suivants :

Nombres	a	b	$a + b$	$a - b$	$a \times b$
Parité des nombres	pair	pair	pair	pair	pair
	impair	impair	pair	pair	impair
	pair	impair	impair	impair	pair

IV). NOMBRES PREMIERS

1) Définition Un nombre entier naturel est dit **premier** s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même

Exemples : 7 est un nombre premier car les seuls diviseurs de 7 sont 7 et 1.

4 n'est pas premier car il est divisible par 2.

12 n'est pas premier et 5 est premier

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 sont :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ;
53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

Remarques : 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1

2 est le seul nombre premier pair

Il y a une infinité de nombre premier

Exercice3 : $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$

Montrer que si a est pair et b impair alors la somme est un nombre impair.

Exercice4 : $a \in \mathbb{N}$

Montrer que si a est impair alors a^2 est un nombre impair

Exercice5 : $a \in \mathbb{N}$

Montrer que si a^2 est impair alors a est un nombre impair

Exercice6 : Montrer que le produit de Deux nombres consécutifs est un nombre pair

Exercice7 : Déterminer la parité des nombres suivants
 $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$

1) $375^2 + 648^2$ 2) $2n+16$ 3) $10n+5$ 4) $18n+4m+24$

5) $2n^2 + 7$ 6) $8n^2 + 12nm + 3$ 7) $26n+10m+7$

8) $n^2 + 11n + 17$ 9) $n^2 + 7n + 20$ 10) $(n+1)^2 + 7n^2$

11) $n^2 + 5n$ 12) $n^2 + 8n$ 13) $n^2 + n$ 14) $n^3 - n$

15) $5n^2 + n$ 16) $4n^2 + 4n + 1$ 17) $n^2 + 13n + 17$ 18) $n + (n+1) + (n+2)$

Exercice8 : $n \in \mathbb{N}$

On pose : $x = 2n + 7$ et $y = 4n + 2$

1) montrer que : x est impair et que y est pair

2) montrer que : $x + y$ est un multiple de 3

Exercice9 :

Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? justifier
votre réponse ?

0 ; 1 ; 2 ; 17 ; 21 ; 41 ; 87 ; 105 ; 239 ; 2787 ; 191 ; 1004001

2) Décomposition en produit de facteurs premiers

Par exemple, 15 n'est pas premier : $15 = 5 \times 3$. Les nombres 5 et 3 sont premiers. Ainsi le nombre 15 est égal à un produit de nombres premiers.

Théorème 1 : tout entier naturel non premier se décompose en produit de facteurs premiers

Exemples : $28 = 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 7 = 2^2 \times 7$ C'est trouver tous les diviseurs premiers d'un nombre.

$$50 = 2 \times 5^2; \quad 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Remarque : on peut démontrer que cette décomposition est unique.

Exercice 10 : décomposer en produit de facteurs premiers le nombre 60 et en déduire tous les diviseurs de 60

Exercice 11 : décomposer en produit de facteurs premiers le nombre 1344 et en déduire le nombre de diviseurs de 1344

Application 1 :

1. Simplifier des fractions

$$\frac{84}{60}$$

$$\frac{60}{60}$$

2. Simplifier des racines carrées

$$\sqrt{2100}$$

V) . le plus grand commun diviseur

Définition : Soient a et b deux entiers non nuls
Le PGCD de a et b est le plus grand diviseur commun des nombres a et b. On le note PGCD (a ; b) ou $a \vee b$

Exemple :

Les diviseurs du nombre 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Pour le nombre 15 sont : 1, 3, 5, 15.

Alors PGCD (12 ; 15) = 3 ou $15 \vee 12 = 3$

• METHODES POUR TROUVER LE PGCD

Propriété : Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b .

Exemple :

1) décomposer en produit de facteurs premiers les nombres : 50 ; 360 ; 60 ; 24 ; 56 ; 14 ; 42

2) calculer : PGCD (50 ; 360) ; PGCD (60 ; 50)

PGCD (56 ; 14) ; PGCD (56 ; 42) ; PGCD (24 ; 60)

VI) . Le plus petit commun multiple

1-Définition

Soient a et b deux entiers non nuls.
PPCM de a et b est le plus petit multiple commun des nombres a et b. On le note PPCM (a ; b).

Exemple : Les multiples du nombre 12 sont : 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...

Les multiples du nombre 8 sont : 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48..

Alors PPCM (12 ; 8) = 24.

METHODES POUR TROUVER LE PPCM

Propriété : Le plus petit multiple commun de deux nombres est le produit des facteurs communs munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b .

Exemple :

1) décomposer en produit de facteurs premiers les nombres : 170 ; 68 ; 6 ; 220 ; 340

2) calculer : PPCM (68 ; 170) ; PPCM (220 ; 340)

Exercice : simplifier une expression avec radicaux :

$$B = \sqrt{63} \times \sqrt{105}$$

Exercice 13 : soit n est un nombre entier naturel impair

1) vérifier que $n^2 - 1$ est un multiple de 8 dans cas suivants : $n = 1$; $n = 3$; $n = 5$; $n = 7$

2) montrer que $n^2 - 1$ est un multiple de 4 si n est impair

3) montrer que $n^2 - 1$ est un multiple de 8 si n est impair

4) en déduire que : $n^4 - 1$ est un multiple de 16 si n est impair

5) montrer que si n et m sont impairs alors :

$$n^2 + m^2 + 6 \text{ est un multiple de } 8$$

Exercice1 :

- 1) Donner tous les multiples de 14 inférieur à 80.
- 2) Donner tous les multiples de 25 compris entre 50 et 170.
- 3) Donner les diviseurs de chacun des nombres 8 ;36 ;24 ;30 ;2 et 5.
- 4) Donner tous les nombres premier inférieur à 60.
- 5) Est-ce que 13 divise 704 ? justifier votre réponse ?
- 6) Est-ce que 2352 est un multiple de 21 ? justifier votre réponse ?

Exercice2 : décomposer les nombres suivants

en produit de puissances de facteurs premiers :

161 ; 144 ; 10000 ; 23000 ; 1080 ; 1400×49

Exercice3 : à l'aide de décomposition en facteurs premiers

simplifier la fraction suivante : $\frac{612}{1530}$ et écrire :

$\sqrt{612 \times 1530}$ sous la forme $m\sqrt{n}$ avec m et n entiers

Exercice4: déterminer le plus grand diviseur commun de x et y dans chaque cas :

- 1) $x=75$ et $y= 325$.
- 2) $x=330$ et $y= 420$.
- 3) $x=214$ et $y= 816$.
- 4) $x=575$ et $y= 1275$.
- 5) $x=132$ et $y= 666$.

Exercice5: déterminer le plus petit multiple commun de x et y dans chaque cas :

- 6) $x=75$ et $y= 325$.
- 7) $x=330$ et $y= 420$.
- 8) $x=214$ et $y= 816$.
- 9) $x=575$ et $y= 1275$.
- 10) $x=132$ et $y= 666$.

Exercice6:

- Est-ce que 111111 est un nombre premier ? justifier votre réponse ?
- Montrer que 1000000001 ; $3^{20} - 1$ et 123456^3 ne sont pas des nombres premiers.
- Montrer que $499999^2 + 999999$ est divisible par 25.

Exercice7: déterminer les nombres pairs et les nombres

impairs : $2^2 + 1$; $15^2 \times 9^2$; $15^2 - 13^2$; 642×97681 ;
 $(41^2 + 765^2)^7$; 2176543×34569820 ; $97^3 \times 97^2$; $2n + 8$; $4n^2 + 1$; $n(n+1)$
 $3n^2 + n$; $n + (n+1) + (n+2)$; $5n^2 + 5n + 1$; $8n^2 + 8n + 1$ ($n+1$)($n+2$)($n+3$) ; $2n^2 + 4n + 7$; $20122n + 20092$;
 $(2n+5)(2n+6)n(n+3)$; $1 + (n+1)^2 + (n+2)^2$;
 $n^2 - 3n + 4$; $n^2 + 3n + 4$

Exercice8 : Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit. La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

- 1) Y-a-t-il des moments (autres que le départ !) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ?
- 2) Préciser le nombre de déplacement par laps de temps