Professeur : Rachid BELEMOU **Lycée** : Prince Moulay Abdellah	Cours **CALCUL VECTORIEL**	**Niveau :** TCT-TCS : BIOF **Année** : 2022-2023

I) Vecteurs du plan

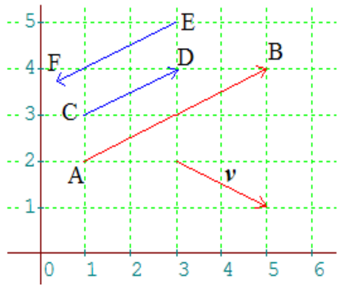
Soient A et B deux points du plan (P)

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par trois données :

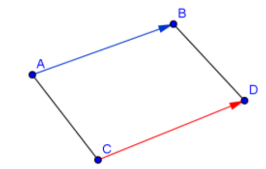
- une *direction* : celle d'une droite (AB)
- Un *sens* de parcours (dans la direction de la droite);
- une *norme* (ou *longueur*) et on note : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$

Exemple :

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$ ont même direction
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont de sens contraire.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ n'ont pas la même direction



II) L'égalité de deux vecteurs



Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme

Remarques :

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{\ldots}$, on note ce vecteur $\vec{u}$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants du même vecteur $\vec{u}$.
- $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.
- $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ (*L'opposé* du vecteur)
- pour tout point A du plan $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (le vecteur nul)

Propriété1 : Soient A ; B; C ; D des points du plan (P) tel que $A \neq B$ et $C \neq D$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ Ssi ABDC est un parallélogramme

Propriété2 : Soient A ; B ; C ; D des points du plan (P)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ SSI $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Propriété3 : Etant donné un point A et un vecteur $\vec{u}$ il existe un point M unique tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

III) Somme de deux vecteurs

1) Relation de Chasles : Soit A, B, C trois points du plan.

On a la relation suivante : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (Relation de Chasles)

Remarque :

Cette relation de Chasles s'utilise de trois manières différentes :

- Tout d'abord, c'est cette relation qui définit la somme de deux vecteurs.
- Cette relation permet de réduire des sommes vectorielles (« factorisation »).
- Cette relation permet dans les démonstrations d'intercaler des points dans des écritures vectorielles (« développement »).

Exemple : on considére les vecteurs :

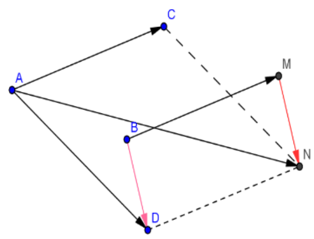
$\vec{U} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA}$

Simplifier les vecteurs : $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Exercice : Soient A ; B; C ; D des points du plan P

1)construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

2)comparer les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{MN}$

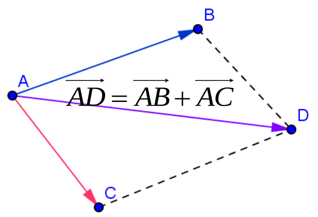


2) Règle du parallélogramme : Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A un point du plan

il existe un point B unique tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et il existe un point C unique tel que $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$

la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ tel que ABDC est un parallélogramme



Remarque : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan

La différence de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à la somme de $\vec{u}$ et $\left(-\vec{v}\right)$

on écrit : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$

IV) La multiplication d'un vecteur par un réel

1. Définition

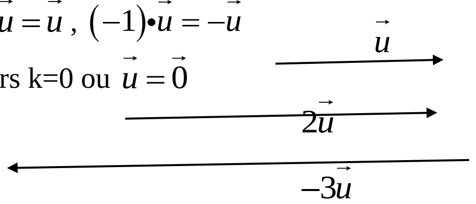
$\vec{u}$ un vecteur non nul et un nombre non nul k, on appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur $k\bullet\vec{u}$ ayant les caractéristiques suivantes:

$k\bullet\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, même sens si $k\succ 0$ et de sens contraire si $k\prec 0$

2. remarques :

$k\bullet\vec{0}=\vec{0}$ et $1\bullet\vec{u}=\vec{u}$, $(-1)\bullet\vec{u}=-\vec{u}$

-Si $k\bullet\vec{u}=\vec{0}$ alors k=0 ou $\vec{u}=\vec{0}$



3. Propriétés :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les nombres a et b dans $\mathbb{R}$:1) $a\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=a\vec{u}+a\vec{v}$ 2) $\left(a+b\right)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$

3) $a\left(b\vec{u}\right)=\left(a\times b\right)\vec{u}$ 4) $1\vec{u}=\vec{u}$ 5) $a\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=a\vec{u}-a\vec{v}$

6) $\left(a-b\right)\vec{u}=a\vec{u}-b\vec{u}$

Application1 : Soient A, B, C trois points du plan non alignés et on considère D et E du plan tel que :

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

1)Faire un schéma

2)Quelle est la nature du quadrilatère EACB justifier votre réponse

Application2 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan et A, B, C, D, O , E des points du plan tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}=\vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{OE}=\vec{v}+\vec{w}$

1)Faire une figure

2)Montrer que ACEB est un parallélogramme et justifier votre réponse

Application3 :

Soit ABCD est un parallélogramme ;

on pose : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$

écrire les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

Application1 :

Soit A, B, C trois points du plan non alignés

On considère M , N , P et Q du plan tel que :

$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AP}$

et $\overrightarrow{AQ}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AP}$

1)Faire une figure 2)En déduire que : $2\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AP}$ et $B=Q$

Application 1: soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Simplifier l'écriture des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{W_1}=2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-4\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}\right)$ et

$\overrightarrow{W_2}=\frac{1}{3}\left(3\vec{u}-9\vec{v}\right)+\frac{1}{2}\left(2\vec{u}+6\vec{v}\right)-2\vec{u}$

Application2 : Soit ABC est un triangle

on pose : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$ construire le vecteur $3\vec{i}-2\vec{j}$

V) La colinéarité de deux vecteurs

1.Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque :

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires ssi ils ont la même direction.

2. Propriété

1) Trois points A, B et C du plan sont alignés si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

2) Soit (AB) une droite. Alors $M \in (D)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

3) Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

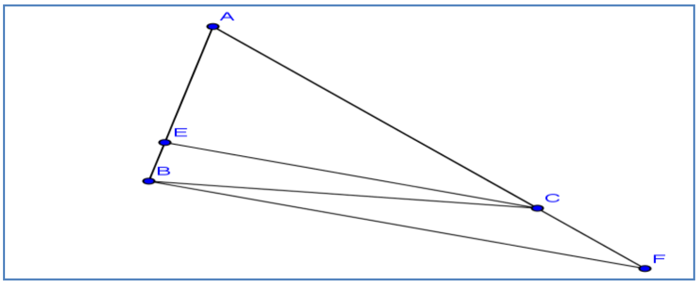
Application 1 : soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :

$\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

1)Faire une figure

2)montrer que : Les points E , F et B sont alignés

Application 2: soit ABC est un triangle. Les points E et F



sont tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

1)Faire une figure

2)écrire les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) montrer que deux droites (EC) et (BF) sont parallèles

VI) Milieu d'un segment

Propriété1 : Soient A, B et I trois points du plan.

Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1) I est le milieu du segment [AB].

2) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ 3) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 4) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Propriété2 : Caractérisation du milieu :

Soient A, B et I trois points du plan.

I est le milieu du segment [AB] ssi pour tout point M on a :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Démonstration :

Application : soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

1)Faire une figure

2)montrer que : C est le milieu du segment [EF]

Professeur : Rachid BELEMOU **Lycée** : Prince Moulay Abdellah	**Exercices** **Calcul vectoriel dans le plan**	**Niveau :** TCT-TCS : BIOF **Année :** 2021-2022

Exercice 1 : On considére les vecteurs :
$\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$ et $\vec{V}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}$
Simplifier les vecteurs : $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Exercice 2 : Soient A ; B; C ; D des points du plan (P)
1) Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$
2) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{MN}$

Exercice 3 : Soient A, B, C trois points du plan non alignés et on considère D et E du plan tel que :
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$
1)Faire un schéma
2)Quelle est la nature du quadrilatère EACB justifier votre

Exercice 4 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan et A, B, C, D, O , E des points du plan tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}=\vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{OE}=\vec{v}+\vec{w}$
1)Faire une figure
2)Montrer que ACEB est un parallélogramme et justifier votre réponse

Exercice 5 : Soit ABCD est un parallélogramme ;
On pose : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$
Écrire les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

Exercice 6 : Soient A, B, C trois points du plan non alignés
On considère M, N , P et Q du plan tel que : $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AP}$
1) Faire une figure
2) En déduire que : $2\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AP}$ et $B=Q$

Exercice 7 : Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
Simplifier l'écriture des vecteurs suivants :
$\overrightarrow{W_1}=2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-4\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}\right)$ et

$\overrightarrow{W_2}=\frac{1}{3}\left(3\vec{u}-9\vec{v}\right)+\frac{1}{2}\left(2\vec{u}+6\vec{v}\right)-2\vec{u}$

Exercice8 : Soit ABC est un triangle
On pose : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$ construire le vecteur $3\vec{i}-2\vec{j}$

Exercice 9 : Soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que : $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
1)Faire une figure
2) Montrer que : Les points E , F et B sont alignés

Exercice10 : soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$
1)Faire une figure
2) Écrire les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3) Montrer que deux droites (EC) et (BF) sont parallèles

Exercice 11 : Soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$
1)Faire une figure
2) Montrer que : C est le milieu du segment [EF]